Teoria gier
Michał Krawczyk

Podziękowania za materiały:
Eric Rasmusen, Marcin Malawski, Ariel Rubinstein

Na tym kursie będziemy chcieli użyć matematycznych narzędzi teorii gier do modelowania interakcji strategicznych.

reguły gry: **gracze**, **akcje**, **wypłaty** i **informacja**.

Cel: przewidzieć co się stanie

Zależnie od posiadanej informacji, starając się zmaksymalizować własną wypłatę, gracze wybierają strategię (dyktującą akcje) dla całej gry.

Równowaga: sytuacja, w której każdy robi to, co jest w jego najlepszym interesie, biorąc pod uwagę co akurat robią pozostali.

Jak używając tych pojęć opisać rynek?

Przykładowa historia, którą chcielibyśmy przedstawić w postaci gry (Rasmusen)

Przedsiębiorca ma zadecydować czy otworzyć pralnię w mieście, w którym jedna już jest.

Nazwijmy dwie mogące na tym rynku działać firmy „Stara Pralnia" i „Nowa Pralnia". Nowa Pralnia nie ma pewności co do przyszłej sytuacji gospodarczej, która może mieć wpływ na popyt na jej usługi. Musi także brać pod uwagę możliwe działania Starej Pralni, która może odpowiedzieć wojną cenową. Stara Pralnia działa od dawna i przetrwa taką wojnę, choć jej zyski znacznie spadną. (Przez chwilę zignorujmy to, że Nowa Pralnia musi też zadecydować czy rozpocząć wojnę cenową czy też ustalić wysokie ceny, że musi zadecydować jaki sprzęt kupić, ilu zatrudnić pracowników itd.).

Graczami są jednostki podejmujące decyzje. Celem każdego z graczy jest taki wybór akcji by maksymalizować użyteczność

Akcja *(lub* **ruch***) gracza* i*, oznaczana* a_i*, to coś co może w danym momencie wybrać.*

Zbiór dostępnych akcji*,* $A_i = \{a_i\}$*, to wszystkie akcje możliwe w danym momencie*

wektor akcji $a = \{a_i\}$, $(i = 1, \ldots, n)$ *– po jednej akcji dla każdego z* n *graczy.*

Zbiór dostępnych akcji Nowej Pralni: *{ Wejść, Nie wejść}* . Zbiór dostępnych akcji Starej Pralni: ceny $\{Niskie, Wysokie\}$.

Każdy wektor akcji daje **wynik**, który może przynieść mniejszą lub większą **użyteczność** (**wypłata**). Zadaniem badacza jest znaleźć **rozwiązanie** tego typu problemu, to jest przewidzieć jak racjonalni gracze postąpią

Inne zastosowania: rynki, aukcje, spory polityczne, zachowania zwierząt...

Typy gier, które będziemy omawiać

1. gry w postaci strategicznej z pełną informacją (gry macierzowe, jak papier-nożyce-kamień)
2. gry w postaci strategicznej z niepełną informacją (gry bayesowskie, jak papier-nożyce-kamień, w której przeciwnik może chcieć nam dać wygrać; ważniejsze zastosowanie: jednoczesna aukcja, w której nie wiemy ile przedmiot jest wart dla innych)
3. gry w formie ekstensywnej z pełną informacją (dynamiczne, w postaci drzewa, jak szachy, nim)
4. gry w formie ekstensywnej z niepełną informacją (w których możemy czegoś dowiedzieć się o innych w trakcie gry, jak życie (negocjacje, konkurencja na rynku, RD, randkowanie, whatever))

Ale zanim przejdziemy do gier, cofniemy się o krok, do indywidualnego podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i niepewności.

Indywidualne podejmowanie decyzji

Pewność vs. Ryzyko vs. Niepewność

Jednostka może podjąć akcję a z dostępnego zbioru A, co będzie prowadziło do konsekwencji $c \in C$.

W warunkach **Pewności**, c wynika z a w sposób deterministyczny,

$f : A \to C$,

$f(a)$ jest konsekwencją akcji a. (np. cheeseburger vs. wrap u McDonalda)

W warunkach **Ryzyka**, c jest łącznie determinowane przez a oraz "stan świata" $\omega \in \Omega$, z pewnym dobrze określonym rozkładem prawdopodobieństwa:

$f : A \times \Omega \to C$,

$f(a, \omega)$ jest konsekwencją akcji a w stanie świata ω (np. wybór między zdrapkami).

Niepewność jest podobna do Ryzyka, ale nie znamy prawdopodobieństw poszczególnych stanów świata (np. inwestycje)

$\succeq$: relacja preferencji na C, rozumiana jako "co najmniej tak samo dobre". Ta relacja ma być:

1. spójna: dla każdych konsekwencji c_1, c_2 albo zachodzi $c_1 \succeq c_2$ albo $c_2 \succeq c_1$ (być może jedno i drugie). Ten warunek oznacza, że np. zawsze potrafisz wybrać między pączkiem a lodami.

2. zwrotna: dla każdych c, $c \succeq c$ (pączek jest przynajmniej równie dobry co inny pączek)

3. przechodnia: jeśli $c_1 \succeq c_2$ i $c_2 \succeq c_3$ to $c_1 \succeq c_3$. (jeśli pączek jest przynajmniej tak dobry jak lody, a lody przynajmniej tak dobre jak lizak, to pączek jest przynajmniej tak dobry jak lizak)

   $c_1 \succ c_2$ oznacza, że c_1 jest lepsze niż c_2 ($c_1 \succeq c_2$ ale $c_2 \not\succeq c_1$).

   (Pokaż, że $\succ$ jest anty-zwrotna i przechodnia)

   $c_1 \sim c_2$ oznacza, że c_1 i c_2 są jednakowo dobre ($c_1 \succeq c_2$ oraz $c_2 \succeq c_1$)

   (Pokaż, że $\sim$ jest zwrotna i przechodnia)

W warunkach pewności jest łatwo: wybieramy to, co najlepsze. Jeśli najlpesza jest więcej niż jedna rzecz, wybieramy dowolną ze zbioru najlepszych. W zastosowaniach często zakłada się, że każdą z nich wybierzemy z jednakowym prawdopodobieństwem, ale uzasadnienie tego jest wątpliwe i reguła ta w teorii gier prowadzić może do mylnej intuicji.

akcja; stan świata	pada	nie pada
rower	moknę	jest git
samochód	uff	czuję się głupio

Wybór w warunkach niepewności

Przykład: relacja preferencji – jest git $\succ$ uff $\succ$ czuję się głupio $\succ$ moknę

Co wybrać? To zależy od prawdopodobieństwa deszczu i siły preferencji.

Ale czasem jest łatwo wybrać.

DEFINICJA (Ścisła dominacja) Akcja a jest ściśle zdominowana przez b jeśli dla każdego stanu świata ω zachodzi $f(b,\omega) \succ f(a,\omega)$.

DEFINICJA (Słaba dominacja) Akcja a jest słabo zdominowana przez b jeśli dla każdego stanu świata ω zachodzi $f(b,\omega) \succeq f(a,\omega)$ oraz dla pewnego ω preferencja jest ostra.

Zapomnij o opcjach zdominowanych

Masz opcję dominującą? Nie trać czasu na dociekanie jaki jest stan świata!

W praktyce ludzie często aktywnie poszukują informacji czy prawdą jest A czy nie-A, choć w obu wypadkach postąpią tak samo.

Poziom bezpieczeństwa

Definicja (bezpieczeństwo) Akcja a jest bezpieczniejsza niż b jeśli istnieje stan świata ω_z (z: zły) taki, że dla wszystkich $\omega \in \Omega$ $F(a, \omega) \succ F(b, \omega_z)$

Funkcja użyteczności reprezentująca preferencje

Przy pewnych technicznych założeniach doczycących ciągłości, preferencje można przedstawić w postaci funkcji użyteczności.

Inaczej mówiąc, istnieje funkcja $u : C \to R$ taka, że $c_1 \succeq c_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $u(c_1) \geq u(c_2)$

Nie wszystkie "rozsądne" relacje preferencji można przedstawić w ten sposób (przykład: preferencje leksykograficzne).

Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka

Każda akcja przynosi loterię na możliwych konsekwencjach

$$L = (c_1, p_1; c_2, p_2, \dots c_K, p_K)$$

(zakładamy, że zbiór możliwych konsekwencji jest skończony)

Musimy zdefiniować użyteczność loterii, nie tylko wyników.

Robimy to w następujący sposób:

Dla wszystkich L_1, L_2 mamy $L_1 \succeq L_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathrm{E}u(L_1) \geq \mathrm{E}u(L_2)$,

gdzie $\mathrm{E}u(L)$, oczekiwana użyteczność loterii L, zostaje zdefiniowana jako

$\mathrm{E}u(L) = \sum_{k=1}^{K} p_k u(c_k)$ (Użyteczność von Neumanna-Morgensterna)

Tę reprezentację mozna zaksjomatyzowac, to znaczy pokazać, że musi zachodzić, gdy spełniony jest zestaw (rozsądnych) postulatów. Na przykład tak:

Loterie złożone to loterie, których możliwymi wynikami są loterie.

1. Aksjomat loterii złożonych: decydent jest indyferentny pomiędzy loterią złożoną a loterią prostą, w której prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych wyników są odpowiednimi iloczynami prawdopodobieństw składanych loterii.
2. Aksjomat niezależności: jeśli dwie loterie różnią się tylko jednym wynikiem, to ten wynik określa, która z loterii jest preferowana:

   $$L = (L_1, p_1; L_2, p_2; \dots L_K, p_K), L' = (L'_1, p_1; L_2, p_2; \dots L_K, p_K),$$

   To $L \succeq L'$ wtedy i tylko wtedy $L_1 \succeq L'_1$
3. Aksjomat ciągłości: jeżeli $L_1 \succ L_2 \succ L_3$ to istnieje pewna $\lambda \in (0, 1)$ taka, że $L_2 \sim (L_1, \lambda; L_3, 1 - \lambda)$

Każda relacja preferencji na loteriach, która spełnia powyższe aksjomaty może być przedstawiona przy pomocy funkcji użyteczności vNM.

Uwaga: jeśli $u(\cdot)$ reprezentuje pewną preferencję na C, to dla każdej rosnącej funkcji h także $h(u(\cdot))$ reprezentuje tę samą preferencję.

Powyższe NIE jest prawdą dla preferencji na loteriach. Natomiast $au(\cdot)+b$ dla dowolnych stałych $a > 0, b$ reprezentuje tę samą preferencję.

Racjonalizowalność

Definicja Powiemy, że akcja b jest *racjonalizowalna* dla danej funkcji użyteczności u jeśli istnieje rozkład prawdopodobieństwa na Ω taki że

$$\mathrm{E}u(f(b)) = max_{a \in A} \mathrm{E}u(f(a)).$$

Czyli akcja jest racjonalizowalna jeśli jakieś przekonania co do prawdopodobieństwa poszczególnych stanów świata każą nam tę właśnie akcję wybrać.

Gry w postaci normalnej

Zbiór **graczy**: $\{1, 2, \dots n\}$

Każdemu graczowi i dostępny jest pewien zbiór akcji A_i. U nas ten zbiór będzie na ogół skończony. Czasem będzie odcinkiem, półprostą, albo prostą.

Strategia to, ogólnie, plan akcji dla dowolnej historii. Ale w przypadku gier w postaci normalnej nie ma historii (a jak już jest, to jest za późno na akcje), więc strategia $\equiv$ akcja. Inaczej będzie dla (niektórych) gier dynamicznych.

Kombinacja akcji to wektor $a = \{a_i\}$, $(i = 1, \dots, n)$ kodujący wybór akcji przez każdego z n graczy.

Reguły gry określają jak wyniki zależą od akcji: $f : A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots \times A_n \to C$

Gracze mają preferencje zdefiniowane na wynikach: $\succeq_1, \cdots \succeq_n$

Zwykle zakładamy f. użyteczności vNM dla każdego z graczy, $u_i : C \to R$

Jednym z graczy może być probabilistyczna "Natura", która nie ma żadnych preferencji (gracz 0).

Przykład gry w postaci normalnej: gra w cykora (*chicken*)

Gracz 1; Gracz 2	skręcić	jechać prosto
skręcić	4,4	1,6
jechać prosto	6,1	-5,-5

Bezpieczeństwo

DEFINICJA: Poziom bezpieczeństwa strategii $a_i \in A_i$ to najniższa wypłata jaka może nas spotkać gdy wybierzemy tę strategię $\min_{a_{-i}} u_i(a_{-i}, a_i)$.

Czyli, podobnie jak w przypadku podejmowania decyzji w warunkach niepewności definicja bezpieczeństwa kazała nam myśleć o złośliwej naturze, tu myślimy o złośliwych przeciwnikach.

Strategię o najwyższym poziomie bezpieczeństwa nazwiemy najbezpieczniejszą.

Ścisła i słaba dominacja w grach w postaci normalnej

Niech a_{-i} oznacza kombinację akcji wszystkich graczy prócz i, t.j. $a_{-i} = (a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n)$.

Niech (a_{-i}, a_i) oznacza akcje "ułożone we właściwej kolejności" t.j. $(a_1, a_2, \dots a_n)$.

DEFINICJA: Akcja $a_i \in A_i$ jest **ściśle zdominowana** przez akcję $b_i \in A_i$ jeśli dla dowolnego wektora a_{-i} mamy $u_i(a_{-i}, b_i) > u_i(a_{-i}, a_i)$

DEFINICJA: Akcja $a_i \in A_i$ jest **słabo zdominowana** przez akcję $b_i \in A_i$ jeśli dla dowolnego wektora a_{-i} mamy $u_i(a_{-i}, b_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i)$ oraz nierówność jest ostra dla przynajmniej jednego a_{-i}.

Znów: nie wybieraj strategii zdominowanej. Nie oczekuj, że inni taką wybiorą.

	a	b	c	d	e
A	$63, -1$	$28, -1$	$-2, 0$	$-2, 45$	$-3, 19$
B	$32, 1$	$2, 2$	$2, 5$	$33, 0$	$2, 3$
C	$54, 1$	$95, -1$	$0, 2$	$4, -1$	$0, 4$
D	$1, -33$	$-3, 43$	$-1, 39$	$1, -12$	$-1, 17$
E	$-22, 0$	$1, -13$	$-1, 88$	$-2, -57$	$-3, 72$

Rysunek 1: Rozwiąż przez iterowane usuwanie strategii zdominowanych

Przykład rozwiązania opartego na (iterowanej) dominacji: *Beauty contest.*

Algorytm Iterowanej Eliminacji Strategii Ściśle Zdominowanych

1. Usuń wszystkie strategie ściśle zdominowane wszystkich graczy
2. Powtarzaj punkt 1 aż nie znajdziesz żadnej strategii ściśle zdominowanej, wtedy $\rightarrow$ koniec

Uwaga:

- Jeśli usuwamy je po jednej, w dowolnej kolejności, nie wszystkie naraz, otrzymamy ten samy wynik.
- Często na końcu niektórym graczom zostaje więcej niż jedna strategia

Inne przykłady: gry w dobra publiczne, niektóre gry w głosowanie

Najlepsza odpowiedź

DEFINICJA: Strategia a_i jest **najlepszą odpowiedzią** na strategie a_{-i} wtedy i tylko wtedy gdy żadna inna strategia A_i nie przynosi i wyższej wypłaty przeciwko a_{-i}, t.j. $a_i \in \arg\max_{A_i} u_i(a_{-i}, a_i)$

Uwaga:

1. Dla przyzwoitych gier zawsze istnieje co najmniej jedna najlepsza odpowiedź na każdy a_{-i}; może być ich wiele
2. Na różne wektory a_{-i}, a'_{-i} często są różne najlepsze odpowiedzi
3. Strategia ściśle zdominowana nigdy nie jest najlepszą odpowiedzią. Strategia słabo zdominowana może taką być.

Równowaga Nasha

DEFINICJA: Wektor strategii $a = (a_1, a_2 \dots a_n)$ jest równowagą Nasha jeśli dla każdego i: a_i jest najlepszą odpowiedzią na a_{-i}.

Problemy z równowagą Nasha

- może nie istnieć
- może być więcej niż jedna
- różne równowagi mogą prowadzić do różnych wyników
- niektóre równowagi dają "dziwne" wyniki

Niektóre cechy równowagi Nasha

- nie zawiera strategii ściśle zdominowanych
- nie zostanie wyeliminowana w procesie iterowanej eliminacji strategii ściśle zdominowanych
- może zawierać strategie słabo zdominowane
- najlepsze odpowiedzi niekoniecznie prowadzą do "najlepszych wyników"

Znajdowanie równowagi Nasha w grach macierzowych: przykłady

Przykład: Cykor

Przykład: Gra na wycieńczenie. Dwóch graczy, jedno dobro, warte $v_i > 0$ dla gracza i. Każdy z graczy może w dowolnej chwili zrezygnować (otrzymując 0). Czas gra rolę: do chwili gdy pierwszy gracz zrezygnuje, każdy z graczy traci 1 zł na jednostkę czasu. Każdy z graczy otrzymuje połowę gdy zrezygnują jednocześnie. Uwaga: to niby gra dynamiczna, ale można ją sprowadzić do macierzowej: w którym momencie zrezygnować przy założeniu, że przeciwnik dotąd nie zrezygnował?

Przykład: Gra lokalizacyjna (OR). Każda z n osób jednocześnie decyduje czy wziąć udział w wyborach, a jeśli tak—-jaką pozycję na politycznym spectrum wybrać. Wyborcy rozłożeni są na odcinku $[0;1]$ zgodnie z pewną funkcją gęstości g. Mamy $g(x) > 0$ dla wszystkich $x \in [0;1]$. Kandydat otrzymuje głosy od wyborców, którzy są bliżej jego pozycji niż jakiegokolwiek innego kandydata; gdy kilku kandydatów wybiera dokładnie tę samą pozycję, dzielą się głosami po równo. Wybory wygrywa kandydat, który otrzyma najwięcej głosów. Każdy kandydat najbardziej chciałby być samodzielnym zwycięzcą, dalej zwycięzca *ex aequo*, dalej w ogóle nie wziąć udziału a przegrać to najgorszy możliwy wynik. UWAGA: tego samego modelu można użyć do wyboru lokalizacji sklepu itp.

Znajdź równowage Nasha dla $n = 2$. Pokaż, że nie ma równowagi dla $n = 3$.

Przykład: konkurencja Cournota, liniowa odwrotna funkcja popytu, $p = a - bQ$, stały koszt przeciętny c, n firm.

Przedstaw funkcje reakcji graficznie dla przypadku $n = 2$

Istnienie równowagi Nasha

Twierdzenie Kakutaniego o punkcie stałym. Niech X będzie zwartym, wypukłym podzbiorem przestrzeni R_n i niech $f : X \to X$ będzie funkcją wielowartościową taką, że

- dla wszystkich x w X zbiór $f(x)$ jest niepusty i wypukły
- dla wszystkich ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ takich, że $y_n \in f(x_n)$ dla wszystkich n, $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$, mamy $y \in f(x)$) (f ma domknięty wykres).

Wówczas istnieją $x^* \in X$ takie że $x^* \in f(x^*)$.

Definicja: relacja preferencji $\succeq_i$ na zbiorze A jest quasi-wklęsła jeśli dla każdego $a^* \in A$ zbiór $\{a_i \in A_i : (a^*_{-i}, a_i) \succeq_i a^*\}$ jest wypukły.

Twierdzenie: gra $\{N; (A_i); (\succeq_i)\}$ ma równowagę Nasha jeśli dla wszystkich $i \in N$:

1. zbiór A_i akcji gracza i jest niepustym, zwartym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Euklidesowej

a relacja preferencji $\succeq_i$ jest

- ciągła
- quasi-wklęsła dla A_i.

Dowód. Zdefiniujmy $BR : A \to A$ przez $BR(a) = \times_{i \in N} BR_i(a_{-i})$ (gdzie BR_i jest funkcją najlepszej odpowiedzi gracza i). Dla każdego $i \in N$ zbiór $BR_i(a_{-i})$ jest niepusty bo $\succeq_i$ jest ciągłe, a A_i zwarte i wypukłe, bo $\succeq_i$ jest quasi-wklęsła na A_i; BR ma domknięty wykres, bo $\succeq_i$ jest ciągłe. Zatem z twierdzenia Kakutaniego wynika, że BR ma punkt stały, a każdy jej punkt stały jest równowagą gry.

Gry ściśle konkurencyjne (gry o sumie "zerowej")

DEFINICJA: Gra $(\{1;2\}(A_i), (\succeq_i))$ jest ściśle konkurencyjna gdy dla każdych akcji $a \in A$ i $b \in B$ mamy $a \succeq_1 b$ wtedy i tylko wtedy gdy $b \succeq_2 a$.

Oznacza to, że cele graczy są wzajemnie doskonale sprzeczne.

Czy mogłoby tak być w grze trzyosobowej?

Często spotyka się odrobinę nieprecyzyjną nazwę "gra o sumie zerowej". Istotnie, można preferencje na możliwych wynikach takiej gry przedstawić w postaci funkcji użyteczności u_1, u_2 takich, że $u_1 + u_2 = 0$.

Gdy przedstawiamy takie gry w postaci macierzy, wystarczy podać wypłaty pierwszego gracza.

PRZYKŁADY

Ważne cechy równowag gier ściśle konkurencyjnych

- Wszystkie równowagi Nasha dają te same wypłaty.
- Równowagi Nasha są *wymienne*: jeśli (x, y) i (x', y') są równowagami, to (x', y) i (x, y') są nimi także.
- Podniesienie wypłaty gracza i w dla pewnej kombinacji strategii nie może obniżyć jego wypłaty równowagowej.
- Gdy usuniemy jakąś strategię któregoś z graczy, jego wypłata równowagowa może się tylko zmniejszyć.

Strategie mieszane

To co dotychczas nazywaliśmy strategiami będziemy nazywać strategiami *czystymi*

Strategia mieszana zadaje pewien rozkład prawdopodobieństwa na akcjach, $m(a_i)$ gdzie $m \geq 0$ i $\int_{A_i} m(a_i) da_i = 1$.

Strategie czyste to zdegenerowane strategie mieszane.

Skupimy się teraz na grach dwuosobowych.

DEFINICJA: Strategia czysta jest najlepszą odpowiedzią na strategię mieszaną gdy żadna inna strategia czysta nie przynosi wyższej oczekiwanej wypłaty.

Strategia mieszana jest najlepszą odpowiedzią na inną strategie mieszaną gdy wszystkie strategie czyste, które wykorzystuje z dodatnim prawdopodobieństwem są najlepszymi odpowiedziami. Dwie strategie mieszane, które są nawzajem najlepszymi odpowiedziami tworzą *równowagę Nasha w strategiach mieszanych*. [definicja dla $n > 2$ jest analogiczna].

Table: Gra w opiekę społeczną

		Biedak		
		pracować (γ_w)		*obijać sie* $(1-\gamma_w)$
	Zasiłek (θ_a)	3,2	$\rightarrow$	$-1, 3$
Rząd		$\uparrow$		$\downarrow$
	Brak zasiłku $(1-\theta_a)$	$-1, 1$	$\leftarrow$	0,0

Wypłaty (Rząd, Biedak). Strzałki wskazują jak podnieść swoją wypłatę.

Jeśli rząd daje *Zasiłek* z prawdopodobieństwem θ_a, zaś biedak wybiera *Pracę* z prawdopodobieństwem γ_w, oczekiwana wypłata rządu wyniesie

$$\begin{aligned} \pi_{rzad} &= \theta_a[3\gamma_w + (-1)(1-\gamma_w)] + [1-\theta_a][-1\gamma_w + 0(1-\gamma_w)] \\ &= \theta_a[3\gamma_w - 1 + \gamma_w] - \gamma_w + \theta_a\gamma_w \\ &= \theta_a[5\gamma_w - 1] - \gamma_w. \end{aligned} \tag{1}$$

Biorąc pochodną względem zmiennych, którymi gracze mogą manipulować otrzymujemy warunki pierwszego rzędu.

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{d\pi_{Rzad}}{d\theta_a} &= 5\gamma_w - 1 \\ \Rightarrow \quad \gamma_w &= 0.2. \end{aligned} \tag{2}$$

Uwaga: Otrzymaliśmy wypłaty biedaka biorąc pochodną po wypłatach *rządu*!

Logika

1. Twierdzimy, że istnieje optymalna strategia mieszana dla rządu.
2. Jeśli biedak wybiera *Pracę* częściej niż w 20% przypadków, rząd nigdy nie wybierze *Zasiłku*.
3. Jeśli strategia mieszana ma być optymalna dla rządu, biedak musi wybrać *Pracę* z prawdopodobieństwem równym dokładnie 20%.

By otrzymać prawdopodobieństwo, z jakim rząd wybiera zasiłek:

$$\begin{aligned}\pi_{Biedak} &= \gamma_w(2\theta_a + 1[1-\theta_a]) + (1-\gamma_w)(3\theta_a + [0][1-\theta_a]) \\ &= 2\gamma_w\theta_a + \gamma_w - \gamma_w\theta_a + 3\theta_a - 3\gamma_w\theta_a \\ &= -\gamma_w(2\theta_a - 1) + 3\theta_a.\end{aligned} \tag{3}$$

Warunek pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d\pi_{Biedak}}{d\gamma_w} = -(2\theta_a - 1) = 0, \\ &\Rightarrow \theta_a = 1/2.\end{aligned} \tag{4}$$

Równowagę w strategiach mieszanych można znaleźć łatwiej

Jeśli jedna ze strategii daje średnio więcej niż inne, to dlaczego miałbym mieszać?

Zatem w równowadze w strategiach mieszanych, strategia gracza 1 musi być taka, że dwie lub więcej strategie czyste wykorzystywana przez gracza 2 dają *dokładnie tę samą wypłatę*.

Krok pierwszy: zgadnij które strategie będą w ogóle wykorzystywane.

Krok drugi: policz jakie prawdopodobieństwa tych strategii spowodują, że drugi gracz będzie indyferentny.

Table: Gra w opiekę społeczną

			Biedak	
		pracować (γ_w)		*obijać się* $(1-\gamma_w)$
	Zasiłek (θ_a)	3,2	$\rightarrow$	$-1,3$
Rząd		$\uparrow$		$\downarrow$
Mamy	*Brak zasiłku* $(1-\theta_a)$	$-1,1$	$\leftarrow$	0,0

$\pi_g(Zasilek) = \gamma_w(3)+(1-\gamma_w)(-1) = \pi_g(Brak_zasilku) = \gamma_w(-1)+(1-\gamma_w)(0)$

Więc $\gamma_w(3+1+1)=1$, więc $\gamma_w = .2$.

$$\pi_p(pracowac) = \theta_a(2) + (1-\theta_a)(1) = \pi_p(Obijac_sie) = \theta_a(3) + (1-\theta_a)(0)$$

więc $\theta_a(2-1-3) = -1$ i $\theta_a = .5$.

Dyskusja i interpretacja

Wystarczy jeśli Twoje strategie *wydają się losowe*

Jeśli jesteś indyferentny, to po co mieszać (i to z odpowiednimi prawdopodobieństwami)?

Interpretacja 1: Populacja jednakowych graczy, z których każdy wybiera czystą strategię (będąc doskonale indyferentnym).

Interpretacja 2: mieszanie wynika z nieznanych charakterystyk graczy (Harsanyi, 1973 – wrócimy do tej interpretacji).

Strategie mieszane i istnienie równowagi

Typowym powodem, dla którego równowaga w strategiach czystych nie istnieje jest to, że zbiór strategii nie jest wypukły (np. jest skończony). Wprowadzenie strategii mieszanych uwypukla zbiór strategii. Wypłaty są liniowe względem prawdopodobieństw, zatem quasi-wklęsłe i ciągłe. Wobec tego skończona gra musi mieć równowagę w strategiach mieszanych. Glicksberg (1952) pokazał także, że gra, w której zbiór strategii czystych każdego z graczy jest wypukłym i zwartym podzbiorem przestrzeni Euklidesowej, a funkcje wypłat są ciągłe musi mieć równowagę w strategiach mieszanych.

Wróćmy do dominacji

Strategie czyste zdominowane przez strategię mieszaną

		Kolumna	
		Północ	*Południe*
	Północ	0,0	4,-4
Wiersz	*Poudnie*	4,-4	0,0
	Obrona	1,-1	1,-1

Żadna strategia czysta nie dominuje innej. Jednak dla gracza wierszowego *Obrona* jest ściśle zdominowana przez (0.5 *Północ*, 0.5 *Południe*). W równowadze każdy z graczy wybierze taką właśnie strategię mieszaną.

Oczekiwana wypłata z tej strategii mieszanej jeśli gracz kolumnowy wybiera *Północ* z prawdopodobieństwem N wyniesie

$$0.5(N)(0) + 0.5(1-N)(4) + 0.5(N)(4) + 0.5(1-N)(0) = 2, \tag{5}$$

Zatem niezależnie od strategii przyjętej przez gracza kolumnowego, oczekiwana wypłata gracza wierszowego jest wyższa gdy zastosuje tę strategię mieszaną niż gdy wybierze *Obronę*.

Wniosek: Wykluczanie z góry strategii mieszanych jest złym pomysłem. Należy je rozważać, nawet jeśli ostatecznie szukamy tylko równowag w strategiach czystych.

Gdy tylko niektórzy konsumenci są poinformowani

Rozważmy przypadek dwóch producentów o zerowych kosztach, działających na rynku, na którym popyt zagregowany z dużej liczby popytów jednostkowych wynosi $D(p) = 0$ dla $p > 1$ i $D(p) = 1$ dla $p \leq 1$. Sprawdzenie jednej ceny jest darmowe dla wszystkich konsumentów. Sprawdzenie drugiej jest darmowe dla q konsumentów, którzy zatem wybierają najtańszą ofertę (rozłożą się po równo gdy równe są ceny). Natomiast dla pozostałych $1 - q$ sprawdzenie drugiej ceny jest "drogie". Szukamy symetrycznej równowagi (tj. obaj producenci wykorzystują taką samą strategię).

Kroki:

1. żadna strategia nie jest grana z dodatnim prawdopodobieństwem (w szczególności nie istnieje równowaga w strategiach czystych). Szukamy mieszanej opisywanej przez f. dystrybuanty $A(p)$, czyli $A(p)$ to prawdopodobieństwo, że gracz zagra co najwyżej p. Każda czasem wybierana cena musi średnio dawać tyle samo.
2. jaką średnią wypłatę daje najwyższa kiedykolwiek wybierana cena? Wobec tego: ile ona wynosi?
3. jak wyrazić średnią wypłatę dla dowolnej innej ceny? ile ona musi wynosić? Stąd wyznaczymy $A(p)$ i sprawdzimy czy jest "przyzwoitą" dystrybuantą. Jaki jest jej nośnik?

Gry Bayesowskie

Jak dotąd zakładaliśmy, że reguły gry są wspólną wiedzą wszystkich graczy. W szczególności, że wszyscy wiedzą, że wszyscy wiedzą, że... wypłaty są takie, jakie są.

W praktyce, często nie mamy pewności co do wypłaty (celów, preferencji) innych graczy. Przykładowo, zapisując się na dany przedmiot na studiach nie wiemy czy nauczyciel będzie czerpać sadystyczną przyjemność z oblania możliwie dużej liczby ludzi. Firmy zasadniczo nie wiedzą jakie są preferencje konsumentów i funkcje kosztów konkurencji.

Możemy myśleć o każdym z graczy jako reprezentującym jeden z możliwych "typów". Natura wybiera "typ" dla każdego z graczy i może wysłać sygnał, np. każdy może znać swój typ, ale nie typy innych.

DEFINICJA: Gra Bayesowska

Gra Bayesowska składa się z

- skończonego zbioru N (zbiór **graczy**)
- skończonego zbioru Ω (zbiór **stanów świata**)

i dla każdego z graczy $i \in N$

- zbioru A_i (zbioru dostępnych dlań **akcji**)
- skończonego zbioru T_i (zbiór **sygnałów**, które gracz i mógłby zaobserwować)
- funkcji $\tau_i : \Omega \to T_i$ (**funkcji sygnału** gracza i)
- miary prawdopodobieństwa p_i na Ω (**apriorycznych przekonań** (*a priori beliefs*) gracza i) dla których $p_i(\tau_i^{-1}(t_i)) > 0$ dla wszystkich $t_i \in T_i$
- relacji preferencji $\succeq_i$ na wszystkich miarach prawdopodobieństwa na $A \times \Omega$ (**relacja preferencji** gracza i), gdzie $A = \times_{j \in N} A_j$.

Co to wszystko znaczy?

- funkcja sygnału określa kto się czego dowie o alokacji typów
- każdy z graczy a priori przypisuje każdemu sygnałowi, który może otrzymać dodatnie prawdopodobieństwo
- preferencje zależą od stanu świata (to jest tego jakie typy reprezentuję ja sam, a jakie inni)

Równowaga Bayesa-Nasha żąda by dla każdego sygnału, każdy gracz wybierał akcję najlepszą w świetle swoich przekonań a posteriori, które wynikają z przekonań a priori, równowagowych strategii innych i reguły Bayesa.

Nieformalny przykład 1: Ranking uniwersytetów

W Scholarii jest dziesięć szkół wyższych. Ciesząca się zaufaniem organizacja ustala ranking zgodnie z pewnymi obiektywnymi kryteriami (jakość kształcenia, osiągnięcia naukowe). Ranking w całości rzadko jest przytaczany, natomiast każda ze szkół może opublikować na swojej stronie internetowej itp. które miejsce zajmuje (nie może kłamać). Które szkoły to zrobią?

Możemy przyjąć, że “społeczeństwo” jest tu dodatkowym graczem, który czasem odwiedza stronę którejś ze szkół i formuje przekonanie o jej miejscu w rankingu. Każda ze szkół chciałaby być postrzegana jako możliwie dobra.

W równowadze szkoła z pierwszego miejsca na pewno się tym pochwali, bo to może tylko poprawić jej wizerunek. Zatem o szkole, która nie publikuje swojego miejsca w rankingu wiadomo, że jest co najwyżej druga. Zatem drugiej także opłaca się pochwalić itd.

Jeżeli aprioryczne przekonania są równomierne (przypisują danej szkole jednakowe szanse na dowolne miejsce w rankingu), to przekonania a posteriori dotyczące szkoły, która nie opublikowała, są równomierne na zbiorze tych miejsc w rankingu, dla których w równowadze szkoła nie decyduje się publikować. Zatem najwyżej sklasyfikowanej z niepublikujących jednak opłaca się publikować (chyba, że jest jedyną niepublikującą, zatem najgorszą z nich). Są więc dwie (równoważne) równowagi: wszystkie szkoły, lub wszystkie poza jedną publikują. Generalnie, nawet przedostatnia “chwali” się tym, że nie jest ostatnia.

Nieformalny przykład 2: podział ciastka

Od ciasta odkrojono dwa zapewne nierówne kawałki, zgodnie ze znanym rozkładem prawdopodobieństwa na możliwych rozmiarach. Zostają one przypisane losowo dwojgu dzieciom. Każde z nich zna tylko rozmiar swojego ciastka. Jednocześnie decydują czy się zamienić. Zamiana dojdzie do skutku jeśli obie strony zgłoszą taką chęć. Jak małe ciasto warto zamienić?

Przykład: czy informacja może boleć?

Informacja może być dla gracza szkodliwa. Spróbujemy tego dowieść konstruując dwuosobową grę Bayesowską mającą następujące cechy: Gracz 1 jest doskonale poinformowany, a gracz 2 nie; Gra ma jedyną równowagę Nasha, w której gracz 2 osiąga wyższą wypłatę niż jego wypłata w jedynej równowadze gry otrzymanej z gry wyjściowej przez poinformowanie gracza jakiego typu jest gracz 1.

Dwa jednakowo prawdopodobne stany świata:

	L	M	R	
U	$1, 2\epsilon$	$1, 0$	$1, 3\epsilon$	stan ω_1
D	$2, 2$	$0, 0$	$0, 3$	

	L	M	R	
U	$1, 2\epsilon$	$1, 3\epsilon$	$1, 0$	stan ω_2
D	$2, 2$	$0, 3$	$0, 0$	

Jeśli tylko gracz 1 jest poinformowany, równowagą jest (DD,L), co daje wypłaty $(2, 2)$. Jeżeli gracz 2 jest także poinformowany, równowagą w stanie ω_1 jest (U, R) a w stanie ω_2 (U, M)

Przykład: konkurencja Cournota z nieznanymi kosztami

Rozważmy duopol Cournota z odwrotną funkcją popytu $P(Q) = a - Q$, gdzie $Q = q_1 + q_2$. Koszty firmy 1 to $C_1(q_1) = cq_1$. Koszty firmy 2 mogą wynosić $C_2(q_2) = c_H q_2$ z prawdopodobieństwem θ i $C_2(q_2) = c_L q_2$ z prawdopodobieństwem $1-\theta$, gdzie $c_H > c_L$. Który z tych dwóch przypadków akurat ma miejsce wie tylko firma 2. Oczywiście firma 2 może chcieć wybrać inny poziom produkcji gdy ma wysokie koszty niż gdy ma niskie. Istotnie, gdy jej koszty są wysokie, jej problem możemy zapisać jako:

$$\max_{q_2}[(a - q_1^* - q_2) - c_H]q_2$$

a gdy są niskie jako:

$$\max_{q_2}[(a - q_1^* - q_2) - c_L]q_2$$

Gdzie q_1^* jest równowagowym wyborem firmy 1. Firma 1 ma nieco trudniejszy problem. Ponieważ nie wie jakiego typu jest firma 2, rozwiązuje problem:

$$\max_{q_1} \theta[(a - q_1 - q_2^*(c_H)) - c]q_1 + (1-\theta)[(a - q_1 - q_2^*(c_L)) - c]q_1$$

To daje nam warunki pierwszego rzędu:

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - q_1^* - c_H}{2}$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - q_1^* - c_L}{2}$$

$$q_1^* = \frac{\theta[a - q_2^*(c_H) - c] + (1-\theta)[a - q_2^*(c_L) - c]}{2} = \frac{a - c - \theta q_2^*(c_H) + (1-\theta)q_2^*(c_L)}{2}$$

O ile wszyscy produkują (tak będzie jeśli koszty nie są zbyt zróżnicowane...), to rozwiązanie jest następujące:

$$q_2^*(c_H) = \frac{a - 2c_H + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_H - c_L),$$

$$q_2^*(c_L) = \frac{a - 2c_L + c}{3} - \frac{\theta}{6}(c_H - c_L),$$

oraz

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_H + (1-\theta)c_L}{3}$$

.

Porównajmy to z przypadkiem doskonałej informacji:

$$q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_j}{3}.$$

Zatem w sytuacji niedoskonałej informacji firma 2 produkuje więcej niż by produkowała w przypadku doskonałej informacji gdy jej koszty są wysokie i mniej niż by produkowała gdy jej koszty są niskie. Istotnie, gdy koszty są wysokie, ale firma 1 o tym nie wie, będzie produkować trochę mniej niż by produkowała wiedząc, zatem zostaje więcej rynku dla firmy 2 (i analogicznie dla niskich).

Aukcje

Aukcje używane są do sprzedawania dzieł sztuki, pól naftowych, częstotliwości, czołgów, papierów skarbowych, pluszaków, przejazdów pseudo-taksówkami, starych znaczków pocztowych, autostrad, reklam na googlach i miliona innych rzeczy. W zasadzie przesłanki do skorzystania z mechanizmu aukcji zamiast mechanizmu stałej ceny są takie:

- dalece nie ma pewności po jakiej cenie coś się sprzeda
- jest jeden sprzedający i więcej niż jeden potencjalny nabywca (lub odwrotnie – w przypadku przetargów –*procurement auctions*)
- utrudniony jest arbitraż (odsprzedaż)
- kupujący są skłonni poczekać na decyzje innych kupujących (np. dlatego, że odbywa się to w sieci, albo dobro jest tak wyjątkowe, że zainteresowanym chce się dokądś pofatygować o oznaczonej porze)
- dobro jest na tyle cenne by warto się było bawić

Zacznijmy od klasyfikacji. W aukcji gracze konkurują o pewne dobro (lub dobra, o tym później), które dla każdego może mieć inną wartość (wycenę). Możemy dzielić aukcje ze względu na to jak te wyceny są wzajemnie powiązane (co ma istotny wpływ na strategie).

W aukcji z **prywatymi wycenami**, gracz nie może się dowiedzieć niczego nowego na temat własnej wyceny dobra na podstawie wycen innych graczy (choć ta wiedza może zmienić jego strategię licytowania).

Specjalny przypadek 1: **aukcja z niezależnymi prywatnymi wycenami *independent private values***: wartości losowane niezależnie, tak, że znajomość własnej wyceny nie pomaga odgadnąć wyceny innych.

Specjalny przypadek 2: **wyceny powiązane (*affiliated private values*)**: przeciwnie, wyceny są skorelowane i można czegoś się dowiedzieć o wycenach innych na podstawie własnej.

Przeciwnie, w przypadku **aukcji ze wspólną wyceną (*pure common values*)**, wszystie wyceny są jednakowe, ale każdy z graczy może mieć inne oszacowanie tej wyceny (gdy wszyscy ją po prostu znają, aukcja przestaje być interesująca i potrzebna).

Reguły aukcji

Możemy także mówić o różnych mechanizmach licytowania (ustalania ceny i zwycięzcy), np.:

1. Rosnąca (angielska, otwarta, *ascending, open-outcry*);

2. Pierwszej ceny, z użyciem kopert (*First-price sealed-bid*);

3. Drugiej ceny, z użyciem kopert (aukcja Vickrey'a);

4. Malejąca (holenderska);

5. Wszyscy płacą (*All-Pay*).

Aukcja rosnąca

Reguły

W każdym momencie każdy z graczy może publicznie zgłosić nową ofertę (*bid*), pod warunkiem, że przebije aktualnie najwyższą. Gdy nikt już nie chce tego zrobić, dobro otrzymuje ten, kto złożył najwyższą ofertę i właśnie tyle płaci.

Strategie

Strategia musi określić jaką ofertę złożyć, zależnie od (1) (oszacowania) własnej wyceny (2) apriorycznego przekonania o możliwych wycenach innych oraz (3) dotychczasowych ofert innych.

Wypłaty

Zwycięzca otrzymuje swoją wyceną pomniejszoną o swoją (najwyższą) ofertę. Pozostali otrzymują zero.

Wariacje na temat aukcji rosnącej:

1. najmniejsze dopuszczalne podniesienie oferty (np. 1000$)
2. aukcja zegarowa albo japońska (*open-exit auction*), w której cena rośnie w sposób ciągły i każdy z graczy decyduje kiedy zrezygnować z udziału. A kto zostanie w kole, na tego bęc.
3. Aukcje na Ebay'u i Allegro: uczestnik podaje swoją maksymalną ofertę, automat licytuje za niego do tej kwoty. Aukcja kończy się o oznaczonej godzienie.
4. Aukcje na Amazonie: jak wyżej, z tym, że każde przebicie aktualnie najwyższej oferty przedłuża aukcję

Formalizm: aukcja jednoczesna

Gracze: Sprzedawca i n kupujących

1. Natura wybiera indywidualne wyceny v_i, zgodnie z pewną ściśle rosnącą i ciągłą dystrybuantą $F(v)$ ($f(v)$ oznacza gęstość) na przedziale $[\underline{v}, \overline{v}]$.

2. Sprzedający ustala mechanizm $(G(b), t(b))$. G to funkcja przypisujaca n-elementowemu wektorowi akcji b (*bids*) graczy $n+1$-elementowy wektor prawdopodobieństw otrzymania dobra. Jego elementy indeksujemy od 0: G_0 to pr., że sprzedawca zatrzyma dobro. Oczywiście G_i są nieujemne i sumują się do 1. Podobnie $t(b)$ to n-elementowy wektor nieujemnych opłat. Będziemy na ogół rozważąć mechanizmy traktujące kupujących symetrycznie.

3. Każdy z biorących udział kupujących wybiera akcję b_i (*bids* – łącznie tworzą wektor b)

4. i-ty kupujący otrzymuje dobro z prawdopodobieństwem $G_i(b)$ i płaci $t_i(b)$.

Wypłaty

Wypłata sprzedającego (=przychód=zysk) dana jest jako

$$\pi_s = \sum_{i=1}^{n} t_i(b)) \tag{6}$$

Mechanizm **maksymalizuje przychód** jeśli oczekiwana wypłata sprzedającego w równowadze jest możliwie najwyższa.

(Oczekiwana) wypłata kupującego i wynosi 0 jeśli nie weźmie udziału, a w p.p.:

$$E(\pi_i(v_i)) = G_i(b)v_i - t_i(b) \tag{7}$$

Oznaczmy najwyższą wycenę jako $v_{(1)}$, drugą $v_{(2)}$ itd. ("remisy" zdarzają się z prawdopoobieństwem 0, bo dystrybuanta jest ciągła).

Mechanizm nazwiemy **efektywnym** jeśli w równowadze dobro zawsze otrzyma kupujący z najwyższą wyceną, czyli

$$G(b^*(v_{(1)}) = 1$$

Aukcja pierwszej ceny

Zasady

Każdy kupujący zgłasza jedną ofertę, nie znając ofert innych. Dobro otrzymuje ten, kto zgłosił najwyższą ofertę i płaci tyle, ile zaproponował.

Strategie

Strategia określa jak oferta zależy od (oszacowania) wyceny.

Wypłaty

Wypłata zwycięskiego oferenta to jego wycena pomniejszona o ofertę. Pozostali otrzymują zero. Sprzedający zarabia tyle ile wynosi najwyższa oferta.

Aukcja pierwszej ceny z ciągłym rozkładem wycen

Natura niezaleznie losuje wyceny dla n neutralnych względem ryzyka kupujących, zgodnie z ciągłą funkcją gęstości $f(v) > 0$ (dystrybuanta $F(v)$) na przedzale $[0, \bar{v}]$.

$G(b(v))$ oznacza prawdopodobieństwo, że gracz wygra aukcję złożywszy ofertę $b(v)$ (czyli odpuszczamy sobie indeksy $_i$). Oczekiwana wypłata kupującego jako funkcja jego wyceny v i funkcji ofert $b(v)$ dana jest wzorem:

$$E(\pi(v, b(v))) = G(b(v))[v - b(v)]. \tag{8}$$

Jak znaleźć równowagowe funkcje ofert?

Z równania (8) mamy

$$b(v) = v - \frac{E(\pi(v, b(v)))}{G(b(v))}. \tag{9}$$

niestety $b(v)$ występuje po obu stronach :-(. Musimy przepisać E(π) i G jako funkcje tylko v.

Zacznijmy od $G(b(v))$. Jeśli funkcje ofert są monotoniczne (wyższa wycena $\Rightarrow$ wyższa oferta), to kupujący z najwyszszą wyceną zalicytuje najwyżej i wygra. Zatem szansa wygrania to szansa, że każdy z $n-1$ konkurentów ma mniejszą wycenę:

$$G(b(v)) = (F(v))^{n-1}. \tag{10}$$

Teraz weźmy się do $E(\pi(v, b(v)))$. Zgodnie z twierdzeniem o obwiedni (*envelope theorem*) jeśli $b(v)$ jest wybrane optymalnie, to pochodna $E(\pi(v, b(v)))$ względem v równa się pochodnej cząstkowej, bo $\frac{\partial E(\pi)}{\partial b} = 0$:

$$\frac{dE(\pi(v,b(v)))}{dv} \quad = \frac{\partial E(\pi(v,b(v)))}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial \pi(v,b(v))}{\partial v} = \frac{\partial E(\pi(v,b(v)))}{\partial v}. \tag{11}$$

Stosując to do równania (8) otrzymujemy

$$\frac{d\pi(v, b(v))}{dv} = G(b(v)). \tag{12}$$

Podstawiając z równania (10) dostajemy pochodną $E(\pi)$ jako funkcję v:

$$\frac{dE(\pi(v, b(v)))}{dv} = (F(v))^{n-1}. \tag{13}$$

Teraz możemy scałkować względem wszystkich możliwych wartości od 0 do v. $E(\pi(0))$ bedzie stałą całkowania:

$$E(\pi(v, b(v))) \quad = E(\pi(0)) + \int_0^v (F(x))^{n-1}dx = \textstyle\int_0^v (F(x))^{n-1}dx. \tag{14}$$

Ostatni krok jest prawdą, bo kupujący o wycenie $v = 0$ nigdy nie zalicytuje niczego dodatniego, zatem jego wypłata musi wynosić $E(\pi(0, b(0))) = 0$.

Wróćmy teraz do funkcji oferty z równania (9) i podstawmy za $G(b(v))$ i $E(\pi(v, b(v)))$ wartości z równań (10) (14):

$$b(v) = v - \frac{\int_0^v (F(x))^{n-1}dx}{(F(v))^{n-1}}. \tag{15}$$

Rozważmy $F(v) = v/\bar{v}$, (rozkład jednostajny). (15) staje się

$$
\begin{aligned}
b(v) &= v - \frac{\int_0^v \left(\frac{x}{\bar{v}}\right)^{n-1} dx}{\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^{n-1}} \\
&= v - \frac{\left.\left(\frac{1}{\bar{v}}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) x^n\right|_{x=0}^{v}}{\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^{n-1}} \\
&= v - \frac{\left(\frac{1}{\bar{v}}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) v^n - 0}{\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^{n-1}} \\
&= v - \frac{v}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right) v.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Ładny wynik mimo żmudnych obliczeń. Można zauważyć, że im więcej uczestników, tym bardziej agresywnie (wyżej) kupujący powinien licytować. Warto także podkreślić, że powyższa strategia nie jest dominująca. Jeśli inni np. są nieracjonalnie agresywni, my także powinniśmy być bardziej agresywni.

A co z awersją do ryzyka?

Aukcje drugiej ceny

Reguły

Każdy kupujący zgłasza jedną ofertę, nie znając ofert pozostałych. Oferty zostają ujawnione, wygrywa ten, kto złożył najwyższą, płacąc kwotę zalicytowaną przez drugiego.

Strategie

Strategia określa jak oferta zależy od wyceny.

Wypłata

Wypłata zwycięskiego oferenta to jego wycena pomniejszona o drugą najwyższą ofertę. Pozostali otrzymują zero. Sprzedawca zarabia drugą najwyższą ofertę.

Twierdzimy, że $b(v) = v$ słabo dominuje każdą inną strategię. Przez p oznaczmy najwyższą spośród ofert złożonych przez innego kupującego niż i. Rozważmy trzy przypadki:

1. $p < v_i$ [chcemy wygrać] Każda oferta $b > p$ (w tym $b = v_i$) przynosi $v_i - p > 0$. Każda oferta $b < p$ przynosi 0. $b = p$ przynosi $(v_i - p)/2 < v_i - p$
2. $p > v_i$ [nie chcemy wygrać] Każda oferta $b > p$ przynosi $v_i - p < 0$. Każda oferta $b < p$ (w tym $b = v_i$) przynosi 0. $b = p$ przynosi $(v_i - p)/2 < 0$
3. $p = v_i$ [wszystko jedno] Zawsze dostaniemy 0.

Czy to jedyna równowaga? Nie. Przykładowo, gdy jest dwóch graczy i ich wyceny mogą przyjmować wartości 10 lub 20, to mamy też taką równowagę:

$$\begin{aligned} &b_1(v = 10) = 10 \quad b_1(v = 20) = 20 \\ &b_2(v = 10) = 1 \quad\ \ b_2(v = 20) = 11. \end{aligned} \tag{17}$$

Ogólnie, każda kombinacja strategii, w której jeden z graczy składa ofertę równą lub wyższą najwyższej możliwej wycenie i średnio rzecz biorąc zarabia jest równowagą.

Aukcje malejące (holenderskie)

Reguły

Sprzedawca ogłasza cenę początkową, którą obniża w sposób ciągły, aż ktoś go zatrzyma, kupując po tej cenie.

Strategie

Kiedy zatrzymać aukcję, jako funkcja (oszacowania) własnej wyceny (więc wbrew pozorom to nie jest gra dynamiczna – jeśli dowiedzieliśmy się czegoś nowego, to jest już za późno).

Wypłaty

Zwycięski oferent otrzymuje swoją wycenę pomniejszoną o cenę, na której zatrzymał. Płaci tę cenę sprzedawcy. Reszta: zero.

Aukcje holenderskie są **strategicznie ekwiwalentne** aukcjom pierwszej ceny, co oznacza, że istnieje funkcja różnowartościowa i “na” przypisująca strategiom w jednej z nich strategie w drugiej, taka, że odpowiadające sobie kombinacje strategii dają te same wypłaty.

Warto zwrócić uwagę, że aukcje rosnące, choć “podobne” do aukcji drugiej ceny, są ekwiwalentne tylko gdy $n = 2$. Tzn. jeśli gdy czegoś się dowiemy, to jest już za późno.

Aukcje "wszyscy płacą" **Reguły**

Każdy z kupujących jednocześnie zgłasza ofertę. Najwyższa oferta wygrywa. Każdy płaci swoją ofertę.

Strategie

Oferta jako funkcja wyceny.

Wypłaty

Zwycięzca: jak zawsze. Przegrani: minus oferta. Sprzedawca: suma ofert.

Przykłady: konkursy SMS-owe, niektóre aukcje dobroczynne, niektóre formy konkurencji (np. wyścigi R&D, wyścigi zbrojeń)

All Pay: przypadek jednakowych wycen

Załóżmy, że n graczy ma te same wyceny v. Oczywiście nie będzie równowagi w strategiach czystych.

Załóżmy symetryczną równowagę. Każdy z kupujących używa tej samej strategii mieszanej, danej rozkładem prawdopodobieństwa z dystrybuantą $M(b)$. Powinna być ciągła (jeśli nie jest, czyli jeśli jakaś konkretna wartość jest grana z dodatnim prawdopodobieństwem, to lepiej zwiększyć ją sobie o ϵ by uniknąć remisów). Rozważmy najniższą wartość b, którą kiedykolwiek kupujący wybiera. Ponieważ nie daje ona szansy wygranej, to musi to być $b = 0$. Zatem w równowadze $E(\pi(b)) = 0$ dla każdej czasem wybieranej b. Stąd

$$(M(b))^{n-1}v = b, \tag{18}$$

zatem

$$M(b) = \sqrt[n-1]{\frac{b}{v}} \tag{19}$$

Rozważmy skrajne oferty. Mamy $M(0) = \sqrt[n-1]{\frac{0}{v}} = 0$ i $M(v) = \sqrt[n-1]{\frac{v}{v}} = 1$, tak jak być powinno – jest przyzwoita dystrybuanta: z wartościami rosnącymi od 0 do 1.

All Pay: przypadek wycen losowanych z przedziału

Załóżmy teraz, że każdego z n kupujących charakteryzuje wycena v wylosowana z rozkładu o gęstości $f(v)$. Przypuszczamy, że równowaga jest symetryczna, wykorzystuje strategie czyste, oraz, że funkcja ofert $b(v)$, jest ściśle rosnąca.

Wykorzystując rozumowanie podobne do tego zastosowanego do mechanizmu aukcji pierwszej ceny możemy wyznaczyć strategie równowagowe dla przypadku wycen o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$:

$$b(v) = \frac{n-1}{n} V^n$$

Twierdzenie o ekwiwalentności przychodów (RET)

Pytanie: który mechanizm jest najlepszy? Okazuje się, że wszystkie spełniające pewne założenia są równie dobre.

Załóżmy, że wszyscy gracze są neutralni wobec ryzyka, a wyceny są prywatne, wylosowane niezależnie z tego samego rozkładu zadanego ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantą $F(v)$ na $[\underline{v}, \bar{v}]$. Jeśli zarówno dla Mechanizmu A_1 jak Mechanizmu A_2 prawdą jest, że:

1. zwycięzcą zostaje kupujący o najwyższej wycenie [aukcja jest efektywna]
2. "najgorszy typ" $v = \underline{v}$ ma wartość oczekiwaną wypłaty równa zero,

to w symetrycznej równowadze każdego z tych mechanizmów oczekiwane wypłaty sa takie same dla każdego typu kupującego i dla sprzedającego.

Dowód RET

Możemy myśleć o ofercie jako o sygnale wyceny, która za nią stoi. np. w dwuosobowej aukcji pierwszej ceny z jednostajnymi wycenami na $[0, 1]$ oferta .3 znaczy, że mamy wycenę .6. Rozważmy kupującego o typie (wycenie) v, który wysyła sygnał świadczący o tym, że jego wycena to z. W rezultacie średnio zapłaci pewne $p(z)$. Chcemy mieć prawdomówność w równowadze, tj. $z = v$. Z założenia 1 wynika, że prawdopodobieństwo, że gracz zdobędzie dobro o ile wybierze sygnał z wynosi $F(z)^{n-1}$, tj. prawdopodobieństwo, że każdy z pozostałych $n-1$ graczy ma wycenę $v < z$. Oznaczmy to p-stwo przez $G(z)$, z gęstością $g(z)$. $g(z)$ jest dobrze określone, bo przyjęliśmy, że $F(v)$ jest rosnąca i ciągła.

Oczekiwana wypłata każdego kupującego typu v jest taka sama, bo ograniczamy się do symetrycznych równowag. Wynosi ona:

$$E(\pi(z, v)) = G(z)v - p(z). \tag{20}$$

Warunek pierwszego rzędu względem wyboru sygnalizowanego typu z (który będzie spełniony, bo rozwiązanie brzegowe $z = 0$ lub $z = \bar{v}$ kłóciłoby się z efektywnością z założenia 1) dany jest wzorem:

$$\frac{dE(\pi(z; v))}{dz} = g(z)v - \frac{dp(z)}{dz} = 0, \tag{21}$$

zatem

$$\frac{dp(z)}{dz} = g(z)v. \tag{22}$$

szukamy równowagi z prawdomównością, możemy zatem za z podstawić v:

$$\frac{dp(v)}{dv} = g(v)v. \tag{23}$$

Następnie całkujemy (23) po wszystkich wartościach od 0 do v, dodając $p(\underline{v})$ jako stałą całkowania :

$$p(v) = p(\underline{v}) + \int_{\underline{v}}^{v} g(x)x dx. \tag{24}$$

Możemy skorzystać z (24 by podmienić $p(v)$ w równaniu (20). Po zamianie z na v i podstawieniu $p(\underline{v}) = 0$ na mocy założenia 2, mamy:

$$E(\pi(v, v)) = G(v)v - \int_{\underline{v}}^{v} g(x)x dx. \tag{25}$$

Równanie (25) mówi, że oczekiwana wypłata kupującego typu v zależy wyłącznie od rozkładu $G(v)$, który z kolei zależy wyłącznie od rozkładu $F(v)$, a nie od funkcji $p(z)$ albo innych cech danego mechanizmu aukcyjnego. A skoro wypłaty kupujących są takie same, to sprzedającego też. Q.E.D.

Symetryczne równowagi aukcji: rosnącej, pierwszej ceny, drugiej ceny, malejącej i all-pay spełniają oba warunki równania RET, zatem przynoszą takie wypłaty kupującym i sprzedającemu.

Uwagi

1. Chociaż rózne mechanizmy aukcji przynoszą tę samą oczekiwaną wypłatę, wypłata dla danej, konkretnej realizacji losowych wycen może być różna
2. RET działa tylko dla niezależnych, prywatnych wycen
3. założeniem RET jest efektywność aukcji. Często istnieje niefektywny mechanizm, który jednak przynosi wyższy oczekiwany przychód sprzedającemu

Załóżmy, że wyceny są jednostajne na $[0, 10]$ i $n = 2$.

ad 1: Rozważmy konkretne wartości, np. $v_1 = 8$: aukcja pierwszej ceny okaże się akurat "lepsza" gdy $v_2 < 4$ i "gorsza" w przeciwnym przypadku.

ad 2: załóżmy, że rozkłady nie są niezależne: $v_2 = 10 - v_1$. Aukcja drugiej ceny da sprzedającemu drugą najwyższą wycenę, $p = v_{(2)}$. Ale reguła: zwycięzca płaci 10 minus druga najwyższa oferta minus epsilon przyniesie sprzedawcy dużo więcej: najwyższą wycenę minus epsilon.

ad 3: niezerowe ceny minimalne mogą podnieść przychody kosztem efektywności

Cena minimalna (*reserve price* – w niektórych aukcjach możemy ją nazwać wywoławczą)

Mechanizm może mieć cenę minimalną r, poniżej której dobro nie zostanie sprzedane. Generalnie im wyższa cena minimalna, tym niższa efektywność, bo dobro nie zostanie sprzedane gdy ze złożonych ofert wynika płatność mniejsza niż cena minimalna.

Zacznijmy od najprostszego przypadku $n = 1$, aukcja drugiej ceny. Generalnie sprzedający zarobi r, o ile kupujący zechce tyle zapłacić:

$$E(\Pi_S) = (1 - F(r))r.$$

Im większa cena minimalna, tym większe ryzyko, że się nie sprzeda. Warunek pierwszego rzędu:

$$1 - F(r) - f(r)r = 0$$

Zatem optymalna cena minimalna spełnia warunek:

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)}.$$

Przykładowo, dla rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$ optymalne jest $r = 0.5$. To generalnie nic nowego pod słońcem – problem monopolisty. Możemy bowiem myśleć o $1 - F(r)$ jako ilości q, która zostanie średnio rzecz biorąc sprzedana. Jak zawsze chcemy mieć MR=MC.

$$MR(r) = \frac{d}{dq}(rq(r)) = r + \frac{q}{dq/dr} = r - \frac{1 - F(r)}{f(r)} = 0$$

Gdy n jest większe, to z jednej strony mniejsze ryzyko, że nikt nie zechce kupić, ale z drugiej strony mniejszy pożytek, bo i tak muszą licytować ostro by przelicytować innych. Zatem nie jest oczywiste czy optymalna cena minimalna spada czy rośnie wraz z n. Po rachunkach, które sobie odpuścimy, okazuje się, że w ogóle od niej nie zależy. Intuicja jest taka: ustalmy drugą najwyższą wycenę $v_{(2)}$. Pytamy czy warto podnosić r. Otóż to zależy od warunkowego rozkładu $v_{(1)}$ pod warunkiem $v_{(2)}$, bo podwyższanie r jest dobre gdy $v_{(1)}$ jest wyższe od r, a sprzedający traci w momencie gdy ją przekroczy. Otóż rozkład $v_{(1)}$ pod warunkiem $v_{(2)}$ nie zależy od tego ile jeszcze wycen jest poniżej $v_{(2)}$. Więc optymalne r jest niezależne od n. Okazuje się nawet, że optymalna cena minimalna jest taka sama dla aukcji pierwszej i drugiej ceny czyli zawsze spełnia warunek

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)}.$$

(lub ewentualnie warunek

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)} + v_S.$$

jeśli dopuścimy nie-zerową wartość dobra dla sprzedającego).

Aukcje o wspólnej wycenie i klątwa zwycięzcy

Przedmiotem aukcji jest przedmiot wyceniany na V ale uczestnicy muszą złożyć ofertę na podstawie obserwowanego przez siebie oszacowania tej wielkości. Nawet jeśli oszacowanie to jest nieobciążone (tj. średnio rzecz biorąc poprawne), występuje **klątwa zwycięzcy:** Jeśli uczestnicy aukcji o wspólnej wycenie licytują do poziomu swojego oszacowania tej wyceny, zwycięzcą zostanie ten, kto najbardziej przeszacował. W rezultacie średnio rzecz biorąc zwycięzca osiągnie ujemną wypłatę.

Wygranie aukcji to zła wiadomość.

Rozważmy aukcję drugiej ceny, z dwoma graczami. Jeśli gracz 1 wygrywa złożywszy ofertę $b(\hat{v}_1)$ opartą o jego aprioryczne przekonanie o wartości dobra $\hat{v}_1$, przekonanie a posteriori jest bardziej pestymistyczne:

$$\tilde{v}_1 = E(v|\hat{v}_1, b(\hat{v}_2) < b(\hat{v}_1), \ldots, b(\hat{v}_n) < b(\hat{v}_1)). \tag{26}$$

Informacja, że $b(\hat{v}_2) < b(\hat{v}_1)$ itd. to dla gracza 1 zła wiadomość, ponieważ sugeruje, że v jest niskie. Zatem

$$\tilde{v}_1 < E(v|\hat{v}_1) = \hat{v}_1. \tag{27}$$

Można myśleć o wypłacie uczestnika aukcji jako o warunkowej ofercie.

Uczestnik aukcji drugiej ceny chciałby złożyć ofertę [X *pod warunkiem przegrania aukcji, ale* $(X - Y)$ *pod warunkiem jej wygrania*],

gdzie X jest jego oszacowaniem wartości przedmiotu pod warunkiem przegrania aukcji, a $(X - Y)$ jest oszacowaniem pod warunkiem wygrania.

Ale jak i tak mam przegrać, to co za różnica co zalicytuję? Powinienem więc licytować swoje oszacowanie wartości dobra przy założeniu wygrania aukcji.

Prosty przypadek aukcji o wspólnej wycenie

Pole naftowe składa się z dwóch części. Wycena każdej z części losowana jest niezależnie z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$. Gracz 1 zna wycenę pierwszej części, s_1 a gracz 2 wycenę drugiej, s_2. Łączna wartość to ich suma, $v = s_1 + s_2$. Jak powinni licytować w aukcji drugiej ceny?

Ex ante, oczekiwana wartość to 1. Załóżmy teraz, że gracz 1 obserwuje $s_1 = 0{,}3$. Jego skorygowane oszacowanie wyceny całości to 0,8. Czy powinien tak zalicytować? Nie, bo wygra raczej wtedy, gdy s_2 jest niskie.

Rozważmy symetryczną równowagę, z rosnącą ofertą jako funkcją sygnału. W równowadze wygram wtedy i tylko wtedy gdy mam wyższy sygnał. Zatem z sygnałem 0,3 spodziewam się wygrać tylko jeśli drugi sygnał jest jeszcze niższy, zatem oczekiwana wartość pola to tylko 0,45!

W równowadze nie opłaca się zmienić oferty nawet odrobinę. Kiedy tak będzie? Jak drugi gracz ma wyższy sygnał, to i tak go nie przelicytuję. Jak ma niższy, to i tak go przelicytuję. Muszę założyć, że ma **dokładnie taki sam**.

Prosty przypadek aukcji o wspólnej wycenie: rozwiązanie

$b_1(s_1) = E(v|s_1, s_1) = 2s_1$ i $b_2(s_2) = E(v|s_2, s_2) = 2s_2$ jest więc naszym kandydatem na równowagę. Istotnie, gdy $s_2 < s_1$, to $b_2 < b_1$, gracz 1 kupuje po cenie $2s_2 < s_1 + s_2 = v$ i nie żałuje decyzji. Gracz 2 musiałby licytować ponad $2s_1$ aby wygrać, zapłaciłby $2s_1$, czyli więcej niż wartość dobra. Analogiczne rozumowanie dla przypadku $s_2 > s_1$.

Zauważ, że $2s_i$ NIE jest strategią dominującą w tym przypadku. Jeżeli zaobserwuję $s_1 = 0,8$ i zalicytuję $b_1 = 1,6$, może się zdarzyć, że drugi gracz zaobserwuje $s_2 = 0{,}2$ ale zalicytuje $b_2 = 1{,}4$ (choć nie powinien). Zapłacę 1,4 za pole warte 1.

A co w przypadku n graczy?

Znów, załóżmy, że $v = s_1 + s_2 + \dots s_n$. Czy powinienem zakładać, że każdy ma dokładnie taki sam sygnał? NIE. Nałóżmy, że $n = 5$ i wszyscy tak postępują i że obserwuję najwyższy sygnał, $s_1 = 1$. Czy powinienem licytować 5? Drugi najwyższy sygnał średnio rzecz biorąc wyniesie 0,8, więc oferta 4, czyli zapłacę średnio 4, choć pole jest średnio rzecz biorąc warte tylko $E(V|s_1 = 1) = 1 + 4 \cdot .5 = 3$.

Skąd obsuwa? Wystarczy, że *jeden* konkurent ma dokładnie taki sam sygnał, a pozostali – niższy (średnio: o połowę niższy), by mała zmiana b robiła różnicę. Zatem kandydatem na równowagę jest $b_i(s_i) = 2s_i + \frac{(n-2)s_i}{2} = \frac{(n+2)s_i}{2}$.

Przykładowo, gracz obserwujący $s_1 = 1$ średnio rzecz biorąc zapłaci $\frac{.8(5+2)}{2} =$ 2,8 za pole warte 3. Ogólniej, dla dowolnego sygnału s_1, oczekiwana wartość wyceny pola pod warunkiem tego, że s_1 jest najwyższym sygnałem wynosi $s_1 \frac{n+1}{2}$, a oczekiwana zapłata $s_1 \frac{n-1}{n} \frac{(n+2)}{2}$, czyli mniej. Jeśli nawet (najgorszy przypadek), drugi najwyższy sygnał jest dokładnie taki sam jak nasz, średnio zarobimy zero. Z tego wynika, że to faktycznie równowaga. Istotnie, załóżmy, że pozostali korzystają ze strategii $b_j(s_j) = \frac{(n+2)s_j}{2}$. Chcemy wiedzieć jaka jest maksymalny najwyższy spośród pozostałych sygnałów, $s_{-i}^{(1)}$, dla którego gracz i chciałby wygrać aukcję. Oczywiście do zapłaty w przypadku wygrania będzie $s_{-i}^{(1)} \frac{n+2}{2}$. Natomiast o ile wygramy w tej sytuacji, to średnio dostaniemy $s_i + s_{-i}^{(1)} + s_{-i}^{(1)} \frac{n-2}{2} = s_i + s_{-i}^{(1)} \frac{n}{2}$. Różnica między przychodem a kosztem wynosi $s_i - s_{-i}^{(1)}$, czyli chcemy wygrać aukcję tylko jeśli mamy wyższy sygnał niż najsilniejszy konkurent, czyli musimy imitować jego strategię, cbdo.

Można zauważyć, że ta strategia nie tylko nie dominuje słabo, ale możemy jej pożałować ex post nawet gdy wszyscy się jej trzymają. np. dla $n = 3$ gdy mamy $s_1 = 0{,}8$,$s_2 = 0{,}7$, $s_3 = 0{,}6$, to gracz 1 kupi pole składając ofertę $b_1 = 2s_1 + \frac{s_1}{2} = 2$. Ale wartość pola wynosi 2,1, więc dowolny inny gracz mógłby zarobić oferując np. 2.01. Skonstruuj przykład, w którym gracz wygrywający aukcję traci na tym.

Czy klątwa zwycięzcy naprawdę działa?

Tabela 1 "Poważne" oferty na aukcjach pól naftowych (Rasmusen)

Offshore Louisiana 1967 Tract SS 207	**Santa Barbara Channel 1968** Tract 375	**Offshore Texas 1968** Tract 506	**Alaska North Slope 1969** Tract 253
32.5	43.5	43.5	10.5
17.7	32.1	15.5	5.2
11.1	18.1	11.6	2.1
7.1	10.2	8.5	1.4
5.6	6.3	8.1	0.5
4.1		5.6	0.4
3.3		4.7	
		2.8	
		2.6	
		0.7	
		0.7	
		0.4	

Można zgadywać, że zwycięzca często przepłaca.

Przychody w aukcjach o wspólnej wycenie

Twierdzenie o ekwiwalentności przychodu nie musi obowiązywać. W szczególności jeśli jest wspólny komponent wyceny i sygnały są "powiązane" (*affiliated* – z grubsza: dodatnio skorelowane), to aukcja rosnąca i aukcja drugiej ceny dają większe oczekiwane przychody niż aukcja pierwszej ceny lub malejąca (te dwie są oczywiście ekwiwalentne). Jeśli jest więcej niż dwóch graczy, to aukcja rosnąca przynosi większy oczekiwany przychód niż aukcja drugiej ceny. Intuicja jest taka, że nadwyżka zwycięzcy aukcji generalnie wynika z jego prywatnej informacji. Przykładowo, gdyby najwyższa wycena była znana, można by jej zażądać (minus ϵ). Otóż w przypadku aukcji drugiej ceny kwota, którą zapłaci zwycięzca zależy od informacji jednego innego gracza (via wysokość drugiej oferty) a w przypadku aukcji rosnącej – od informacji wszystkich innych graczy. A ponieważ sygnały są powiązane, to info innych mówi coś o info zwycięzcy. Więc jego renta informacyjna spada.

Strategie w aukcjach o wspólnej wycenie: przypadek aukcji drugiej ceny i aukcji rosnącej

Z niezależnymi prywatnymi wycenami kupujący powinni licytować zgodnie ze swoją wyceną. Jest tak ponieważ

1. Twoja oferta nie ma wpływu na cenę, którą zapłacisz
2. $b(v) = v$ to jedyna strategia, przy której na pewno wygrasz gdy chcesz wygrać (bo cena – najwyższa spośród pozostałych ofert – jest mniejsza od Twojej wyceny) i przegrasz gdy chcesz przegrać (bo jest wyższa)

Ale jak licytować gdy nie znasz swej wyceny v, a jej oszacowanie jest inne gdy wygrasz niż gdy przegrasz?

Załóżmy, że wycena v ma a priori rozkład nieinformacyjny – dowolna wartość jest tak samo prawdopodobna (jak komuś się nie podoba, to może przyjąć, że to jednostajny na b. długim przedziale). Każdy z n graczy obserwuje prywatny sygnał s_i losowany niezależnie z przedziału $[v-m, v+m]$, gdzie m jest znaną stałą.

Maksymalna możliwa wartość v to $s_{(n)} + m$. Minimalna możliwa wartość to $s_{(1)} - m$. Każda w tym przedziale jest jednakowo prawdopodobna, zatem nieobciążonym estymatorem v jest

$$\frac{s_{(n)} + s_{(1)}}{2}.$$

(liczą się tylko dwa skrajne sygnały. W szczególności średnia czy mediana mogą być zupełnie inne).

Aukcja rosnąca (japońska)

Równowaga: Jeśli nikt jeszcze nie zrezygnował, kupujący i powinien zrezygnować gdy cena osiągnie poziom s_i. Jeśli ktoś już wcześniej zrezygnował – pierwszy przy cenie $p_{(n)}$ – kupujący i powinien zrezygnować przy cenie $p_i = \frac{p_{(n)}+s_i}{2}$.
Wyjaśnienie: Czy opłaca się małe odstępstwo od równowagi? Zawsze są dwie możliwości: a) ktoś ma wyższy sygnał niż i b) wszyscy pozostali jeszcze w grze mają taki sam sygnał. (Bo ci, co mieli niższy, zrezygnowali już wcześniej). W przypadku a) i tak nie wygramy aukcji. W przypadku b) jeśli jeszcze nikt nie zrezygnował, czyli wszyscy mają s_i, wycenę dobra szacujemy na s_i, więc faktycznie trzeba przy tej cenie zrezygnować. Jeśli natomiast niektórzy wcześniej zrezygnowali, z czego pierwszy przy cenie $p_{(n)}$, a pozostali wszyscy mają s_i, to wycenę szacujemy na $\frac{p_{(n)}+s_i}{2}$, więc faktycznie przy tej cenie należy zrezygnować. Jest tak dlatego, że w równowadze $s_{(n)} = p_{(n)}$

Zwycięzca zapłaci cenę, przy której zrezygnował drugi, czyli $\frac{s_{(n)}+s_{(2)}}{2}$. Średnio wielkości te wyniosą

$$\begin{aligned} Es_{(2)} &= (v-m)+\left(\tfrac{n+1-2}{n+1}\right)((v+m)-(v-m)) \\ &= v+\left(\tfrac{n-3}{n+1}\right)m. \end{aligned} \tag{28}$$

oraz

$$\begin{aligned} Es_{(n)} &= (v-m)+\left(\tfrac{n+1-n}{n+1}\right)((v+m)-(v-m)) \\ &= v+\left(\tfrac{1-n}{n+1}\right)m \end{aligned} \tag{29}$$

Czyli średnio do zapłaty będzie

$$\begin{aligned} Ep_{(2)} &= \tfrac{\left[v+\left(\frac{1-n}{n+1}\right)m\right]+\left[v+\left(\frac{n-3}{n+1}\right)m\right]}{2} \\ &= v-\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{n+1}\right)2m. \end{aligned} \tag{30}$$

np. gdy $m=50$ i $n=4$, mamy

$$Ep_{(2)} = v-\left(\frac{1}{10}\right)(100) = v-10. \tag{31}$$

Oczekiwany przychód sprzedającego rośnie wraz z liczbą graczy n i spada wraz z parametrem m mierzącym niepewność (wynikającą z niedokładności sygnałów). Podobnie będzie dla innych formatów aukcji.

Warto zauważyć, że w klasycznej aukcji rosnącej czasem nie wiadomo kiedy zrezygnował pierwszy z graczy. Jeśli w ogóle nie widać kiedy kto rezygnuje, to działa ona jak aukcja drugiej ceny.

Aukcja drugiej ceny

Równowaga: Licytuj $p_i = s_i - \left(\frac{n-2}{n}\right) m$.

Wyjaśnienie: Trzeba założyć, że masz najwyższy sygnal, ex aequo z jednym innym graczem, zatem będzie trzeba zapłacić dokładnie wysokość swojej oferty. Jakiego V możemy się spodziewać w takiej sytuacji? Z wzoru na oczekiwaną wartość najwyższej spośród $n-1$ realizacji zmiennej o rozkładzie jednostajnym:

$$\begin{aligned} s_i &= (v-m) + \left(\frac{([n-1]+1-1)}{[n-1]+1}\right)([v+m]-[v-m]) \\ &= v + \left(\frac{n-2}{n}\right)(m). \end{aligned} \tag{32}$$

Należy zalicytować wartość v będącą rozwiązaniem równania, co daje $p_i = s_i - \left(\frac{n-2}{n}\right)(m)$. ($n-2$ pozostałych graczy średnio będzie mieć sygnał o m mniejszy).

Średnio rzecz biorąc, drugi najwyższy sygnał to $Es_{(2)} = v + \left(\frac{n-3}{n+1}\right) m$. Zatem oczekiwana wysokość ceny i oczekiwany przychód z aukcji to

$$\begin{aligned} Ep_{(2)} &= [v + \left(\tfrac{n-3}{n+1}\right) m] - \left(\tfrac{n-2}{n}\right)(m) \\ &= v - \left(\tfrac{n-1}{n}\right)\left(\tfrac{1}{n+1}\right) 2m. \end{aligned} \tag{33}$$

Np. dla $m = 50$ i $n = 4$, mamy

$$Ep_{(2)} = v - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(100) = v - 15. \tag{34}$$

Jeśli jest przynajmniej trzech graczy, to oczekiwany przychód będzie niższy w aukcji drugiej ceny niż w aukcji rosnącej.

Gry dynamiczne (z doskonałą informacją)

(gry w postaci drzewa, gry ekstensywne)

DEFINICJA *Gra dynamiczna z doskonałą informacją* składa się ze

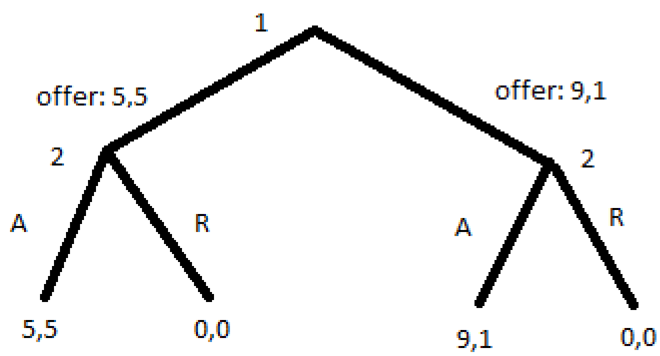
- Zbioru graczy N.
- Zbioru możliwych (skończonych lub nie) historii H spełniających następujące warunki:
  - Zerowa (pusta) historia należy do H
  - Jeśli $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ (gdzie K może być nieskończone) oraz $L < K$, to $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$
  - Jeśli nieskończona historia $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej L, to $(a^k)_{k=1}^{\infty} \in H$

  (Każdy element zbioru H będziemy nazywać **historią**; składają się one z **akcji** podejmowanych przez graczy). Historię $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ nazwiemy **zakończoną** jeśli jest nieskończona lub jeśli nie istnieje żadne $(a^k)_{k=1,\dots,K+1} \in H$. Zbiór historii zakończonych oznaczymy Z.
- Funkcji P przypisującej każdej niezakończonej historii (każdemu elementowi $H \backslash Z$) element zbioru N. (P wskazuje kto ma się ruszyć po historii h.)
- Dla każdego gracza $i \in N$ relację preferencji $\succeq_i$ na Z.

Historię h, po ktorej nastąpiła akcja a można oznaczyć (h, a).

Interpretacja: po dowolnej niezakończonej historii (dotychczasowym przebiegu gry) h, gracz $P(h)$ wybiera możliwą akcję a, tj. taką akcję, że (h, a) należy do H.

Drzewo gry jest wygodnym sposobem przedstawiania gry dynamicznej. Rysujemy spójny graf skierowany bez cykli, w którym łuki (ścieżki proste) od-



Rysunek 2: Uproszczona gra przetargu ultymatywnego (*mini-ultimatum game*)

powiadają akcjom, a ścieżki od "korzenia" odpowiadaja historiom. Każda niezakończona historia prowadzi do innego wierzchołka nie będącego liściem; każda zakończona historia prowadzi do liścia.

Strategie

Akcja $\neq$ strategia!

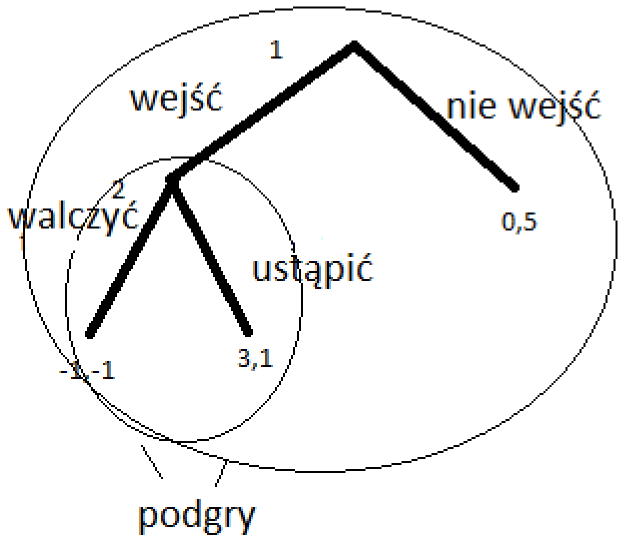
Strategia to plan działania na każdą okoliczność, w której działać musimy.

DEFINICJA Strategia gracza $j \in N$ w grze dynamicznej z doskonałą informacją $\langle N, H, P, \succeq_i \rangle$ to funkcja przypisująca dostępną akcję każdej niezakończonej historii $h \in H \backslash Z$, dla której $P(h) = j$.

Kombinacja strategii wszystkich graczy indukuje wynik gry – zakończoną historię.

Strategia powinna dyktować akcję nawet w tych wierzchołkach, które, wg tej strategii, nie zostaną odwiedzone.

Grę dynamiczną można przedstawić w postaci macierzy



Rysunek 3: Gra w wejście na rynek

	walczyć jeśli gracz 1 wszedł	ustąpić jeśli gracz 1 wszedł
wejść	-1,-1	3*,1*
nie wejść	0*,5*	0,5*

Tabela 1: Gra w wejście na rynek w postaci macierzowej

Zatem pojęcie równowagi Nasha można łatwo zastosować także do gier dynamicznych – to NE odpowiedniej gry macierzowej.

Nash to za mało

W grach dynamicznych gracze mogą chcieć zmienić swoją strategię równowagową na którymś etapie.

Zakladać, że tego nie zrobią choć mogliby na tym zyskać – to naiwność. To generalnie odpowiadałoby wierzeniu w **niewiarygodne groźby**.

DEFINICJA **Podgrą** gry dynamicznej z doskonałą informacją $\Gamma = \langle N, H, P, (\succeq_i)\rangle$ następującą po niezakończonej historii $h \in H \backslash Z$ nazywamy grę $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (\succeq_i |_h)\rangle$, gdzie

1. $H|_h$ jest zbiorem sekwencji akcji h', dla których $(h, h') \in H$,
2. $P|_h(h') = P(h, h')$ dla każdego $h' \in H|_h$ oraz
3. $h' \succeq_i |_h h''$ wtedy i tylko wtedy gdy $(h, h') \succeq_i (h, h'')$.

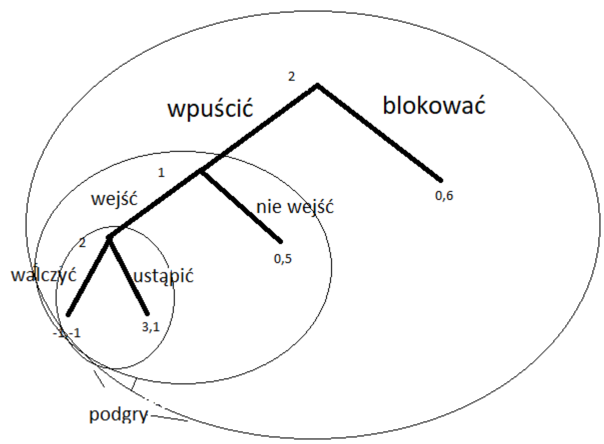
Każda gra jest swoją własną podgrą (następującą po pustej historii).

Oznaczmy przez $s_i|_h$ strategię określoną przez zastosowanie s_i do podgry $\Gamma(h)$ i analogicznie $s^*|h$ dla kombinacji strategii wszystkich graczy.

DEFINICJA Kombinacja strategii s^* stanowi równowagę **stabilną względem podgier** (*subgame perfect Nash equilibrium, SPNE*) jeśli $s^*|h$ jest równowagą Nasha dla każdej podgry $\Gamma(h)$.

W grze w wejście na rynek (wejść, ustąpić) jest SPNE. (nie wejść, walczyć) jest NE, ale nie SPNE. Zauważ, że nie-wiarygodna groźba ("będę walczyć!") gry dynamicznej odpowiada słabo zdominowanej strategii gry w postaci macierzy.

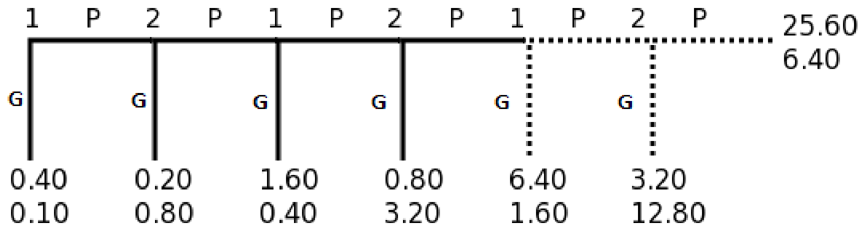
Problem z SPNE: czy nie powinienem porzucić mojego przekonania o racjonalności drugiego gracza gdy wybiera głupio? (zob. rys.). Gdyby gracz 2 był racjonalny, powinien wybrać blokowanie. Czy mogę zatem wierzyć, że nie będzie walczyć? W tym przykładzie to rozumownie nie wywraca SPNE, ale w następnym już tak.



Rysunek 4: Gra w wejście na rynek z możliwością blokowania

	wpuścić, walczyć,	wpuścić, ustąpić	blokować, walczyć	blokować, ustąpić
wejść	-1,-1	3*,1	0*,6*	0*,6*
nie wejść	0*,5	0,5	0*,6*	0*,6*

Tabela 2: Gra w wejście na rynek z możliwością blokowania – w formie macierzowej



Rysunek 5: Stonoga (McKelvey and Palfrey 1992)

Stonoga

Czy założenie o wspólnej wiedzy o racjonalności jest racjonalne?

Timing ma znaczenie: Cournot vs Stackelberg

$n = 2$, $P = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$, koszt jednostkowy: $c_1 = c_2 = c$.

Zyski:

$$\Pi_i = q_i(P - c_i) = q_i(a - q_i - q_{-i} - c_i)$$

FOC:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = (a - q_i - q_{-i} - c_i) - q_i = a - 2q_i - q_{-i} - c_i = 0$$

Zatem dla dowolnego q_{-i} najlepszą odpowiedzią gracza i będzie $q_i = max(\frac{a-q_{-i}-c_i}{2}, 0)$

Jeśli akcje wybierane są jednocześnie (Cournot), NE to $(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3})$.

Ale jeśli sekwencyjnie (Stackelberg), to istnieje wiele NE, z których jedna jest SPNE: $(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{4})$. Łączna produkcja jest inna, gracz 1 zyskuje (dlaczego?), gracz 2 traci.

Własności SPNE

Oczywiście każda SPNE jest równowagą Nasha ale odwrotna zależność nie jest prawdziwa.

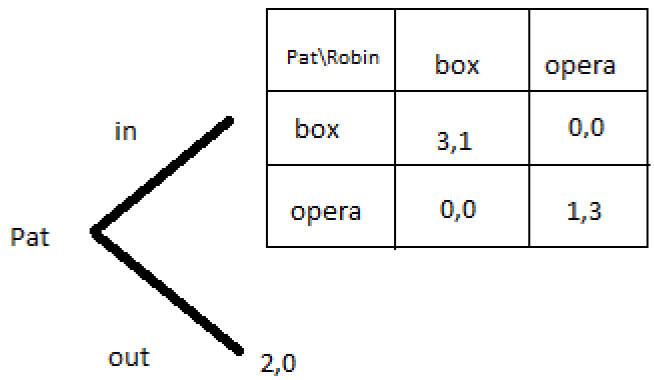
Istnienie: każda skończona gra dynamiczna ma równowagę stabilną względem podgier (która można znaleźć przy pomocy indukcji wstecznej (*backward induction*), czyli rozwiązując grę „od końca”, od najmniejszych podgier, wnioskując jak należy się zachować na podstawie tego, jakiego zachowanie spodziewamy się później.

(nie)jednoznaczność: Może istnieć więcej niż jedna równowaga stabilna względem podgier. Przykładowo, będzie tak gdy gracz, który rusza się jako ostatni na ścieżce SPNE jest indyferentny pomiędzy dwoma najlepszymi akcjami. Czasem jednak wszystkie, liczne, równowagi stabilne prowadzą do tego samego wyniku (tak jest niewątpliwie w szachach, choć nie wiadomo jakie są strategie równowagowe). Natomiast jeśli nie ma żadnej indyferencji, to SPNE jest zdefiniowana jednoznacznie.

Dwa na ogół niegroźne uogólnienia

Ruchy losowe: w niektórych węzłach akcję wybiera “natura”, zgodnie z predefiniowanym prawdopodobieństwami.

Ruchy jednoczesne: w niektórych węzłach akcję wybiera kilku graczy jednocześnie. UWAGA: w takich grach SPNE w strategiach czystych może nie istnieć (np. gra papier-nożyce-kamień).



Rysunek 6: Wojna płci z opcją zewnętrzną

Indukcja wprzód (*forward induction*)

Ale czasem możemy wywnioskować co przeciwnik zamierza zrobić na podstawie tego, jak już wcześniej się zachował.

Jednoczesna podgra ma trzy równowagi (z czego jedna w strategiach mieszanych). Tylko w jednej z nich Pat jest w lepszej sytuacji niż gdy wybierze out, oczekujemy zatem wyboru strategii ((In, Box),Box), choć to nie jedyna SPNE.

cena firmy 1; cena firmy 2	wysoka	średnia
wysoka	4,4	0,5*
średnia	5*,0	3*,3*

cena firmy 1; cena firmy 2	wysoka	średnia	niska
wysoka	4,4	0,5*	0,2
średnia	5*,0	3*,3*	0,2
niska	2,0	2,0	1*,1*

Gry powtarzane

Rozważamy teraz gry, w których dwaj gracze rozgrywają serię identycznych gier jednoczesnych (w kolejnych *rundach*). O każdej z nich mówi się zwykle *stage game*, a o całości *supergame*. Okazuje się, że średnie (w przeliczeniu jedną rundę) wypłaty w równowadze supergry mogą być inne niż wynikałoby z równowag(i) pojedynczej gry. Zacznijmy od gier powtarzanych skończoną liczbę razy. Zakładamy, że celem jest maksymalizacja średniej wypłaty. Np. gra w ustalanie cen (tu o charakterze dylematu współpracy).

Rozwżmy najpierw górną macierz (dwie strategie w *stage game*). Tu niewiele się zmienia. Jedyna równowaga *stage game* to (s, s). W równowadze supergry w ostatniej rundzie to właśnie zostanie zagrane, bo odstępstwo zmniejszyłoby wypłatę (w jest zdominowane). Zatem także w przedostatniej rundzie w zmniejsza wypłatę (bo jest zdominowane, a w ostatniej rundzie i tak będzie zagrane s). Zatem w równowadze w przedostatniej musi być zagrane s itd. Zawsze s to jedyna równowaga Nasha (nawet nie tylko jedyna SPNE). Dodajmy jednak jeszcze opcję niskiej ceny: Tu są dwie równowagi, więc nie ma pewności która będzie zagrana. A to pozwala zagrać coś innego niż równowagę w początkowych rundach! Rozważmy strategię dla dwurundowej supergry: w w pierwszej rundzie; w drugiej s o ile w pierwszej obaj zagrali w i n w przeciwnym wypadku. Łatwo stwierdzić, że to równowaga oraz, że średnie wypłaty wynoszą 3,5, czyli więcej niż w najlepszej równowadze *stage game*. Ogólnie, jeśli istnieją dwie równowagi, z których jedna Pareto-dominuje drugą ale sama nie jest Pareto-optymalna, to w dostatecznie długiej skończonej supergrze można osiągnąć średnią wypłatę wyższą niż nawet w lepszej z równowag *stage game*, bo w początkowych rundach (ale nigdy ostatniej) można w równowadze supergry zagrać coś lepszego niż lepszą z równowag *stage game*.

Gry powtarzane w nieskończoność

Dużo łatwiej jest podtrzymać obopólną współpracę gdy gra powtarzana jest w nieskończoność, o ile tylko gracze są cierpliwi. Oznaczając przez x_t wypłatę w t-tej rundzie, można by zakładać, że gracz maksymalizuje średnią użyteczność:

$$U = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \Sigma_{t=0}^{T} u(x_t)$$

to jednak oznacza, że np. niższa wypłata w pierwszym milionie rund nie ma znaczenia. Zwykle zakładamy więc raczej, że gracze maksymalizują średnią zdyskontowaną użyteczność.

$$U = (1-\delta)\Sigma_{t=0}^{\infty} \delta^t u(x_t)$$

Def: minimax danej gry dla gracza i to $\min_{s_{-i}} \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$. Czyli ile dostanie i gdy pozostali starają się zminimalizować jego wypłatę (nie wiedząc co on wybierze – s_i może być strategią mieszaną).

Twierdzenie "ludowe" (*Folk Theorem*) Dla wystarczająco wysokiej δ można w SPNE podtrzymać dowolny profil średnich zdyskontowanych użyteczności będący wypukłą kombinacją użyteczności *stage game*, o ile tylko daje ona każdemu z graczy więcej niż minimax *stage game*.

Gry dynamicze z niedoskonałą informacją

Dotychczas zakładaliśmy, że każdy z graczy wie co się zdarzyło w grze do tej pory (doskonała informacja). Często jednak mamy do czynienia z inną sytuacją. Przykładowo, firma może nie być pewna ile konkurent zainwestewał w prototyp. Jeśli dopuścimy ruchy losowe, możemy mieć też niedoskonałą informację co do "typów" innych graczy (mieliśmy już z tym do czynienia w przypadku gier bayesowskich).

Gry dynamiczne (z niedoskonałą, być może, informacją)

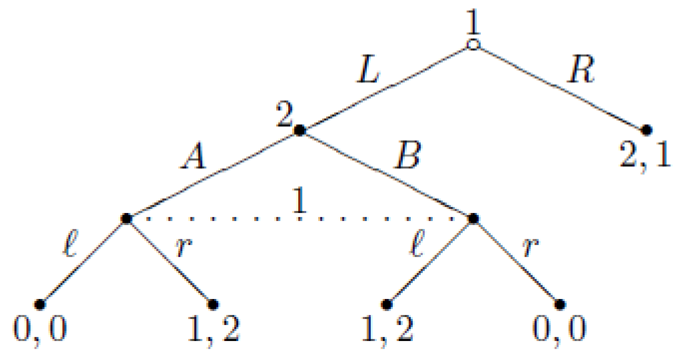
DEFINICJA (OR) *Gra dynamiczna* składa się z

- Zbioru graczy N.
- Zbioru możliwych (skończonych lub nie) historii H spełniających następujące warunki:
  - Zerowa (pusta) historia należy do H
  - Jeśli $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ (gdzie K może być nieskończone) oraz $L < K$, to $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$
  - Jeśli nieskończona historia $(a^k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej L, to $(a^k)_{k=1}^{\infty} \in H$

  (Każdy element zbioru H będziemy nazywać **historią**; składają się one z **akcji** podejmowanych przez graczy). Historię $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ nazwiemy **zakończoną** jeśli jest nieskończona lub jeśli nie istnieje żadne $(a^k)_{k=1,\dots,K+1} \in H$. Zbiór historii zakończonych oznaczymy Z.
- Funkcji P przypisującej każdej niezakończonej historii (każdemu elementowi $H \backslash Z$) element zbioru N lub c (chance) interpretowane jako losowa "natura". (P wskazuje kto ma się ruszyć po historii h.)
- Funkcji f_c przypisującej każdej historii h dla której $P(h) = c$ zmienną losową o rozkładzie $f_c(\cdot|h)$ zdefiniowanym na $A(h)$, niezależną od pozostałych takich zmiennych. ($f_c(a|h)$ oznacza prawdopodobieństwo, że po historii h zdarzy się a).
- Dla każdego gracza $i \in N$ rozbicie zbioru wierzchołków, w których dany gracz decyduje na **zbiory infomacyjne** $\mathcal{I}_i$ of $h \in H : P(h) = i$ o tej własności, że $A(h) = A(h')$ zawsze gdy h i h' należą do tego samego zbioru informacyjnego.
- Dla każdego gracza $i \in N$ relację preferencji $\succeq_i$ na Z.

Historie należące do tego samego zbioru informacyjnego rozumiemy jako nierozróżnialne dla danego gracza.

Oczywiście gry w doskonałej informacji to specjalny przypadek, w którym wszystkie zbiory informacyjne są jednoelementowe.



Rysunek 7: Przykład gry z niedoskonałą informacją

Strategie

DEFINICJA Czystą strategią gracza $i \in N$ w grze dynamicznej z niedoskonałą informację jest funkcja przypisującą jedną z dostępnych akcji każdemu zbiorowi informacyjnegmu.

Na rys. Gracz 1 ma dwa zbiory informacyjne, a w każdym z nich dwie możliwe akcje. Ma zatem $2 \cdot 2 = 4$ strategie (choć strategie Rl oraz Rr doprowadzą do tego samego wyniku.

Równowaga

Pojęcie równowagi w strategiach mieszanych jest definiowane naturalnie, jako kombinacja strategii mieszanych, z których każda jest najlepszą odpowiedzią na pozostałe. Jednak z powodów analogicznych do tych omawianych wcześniej, pojęcie to jest niewystarczające, ponieważ gracze mogą chcieć odstąpić od swojej strategii w którymś momencie.

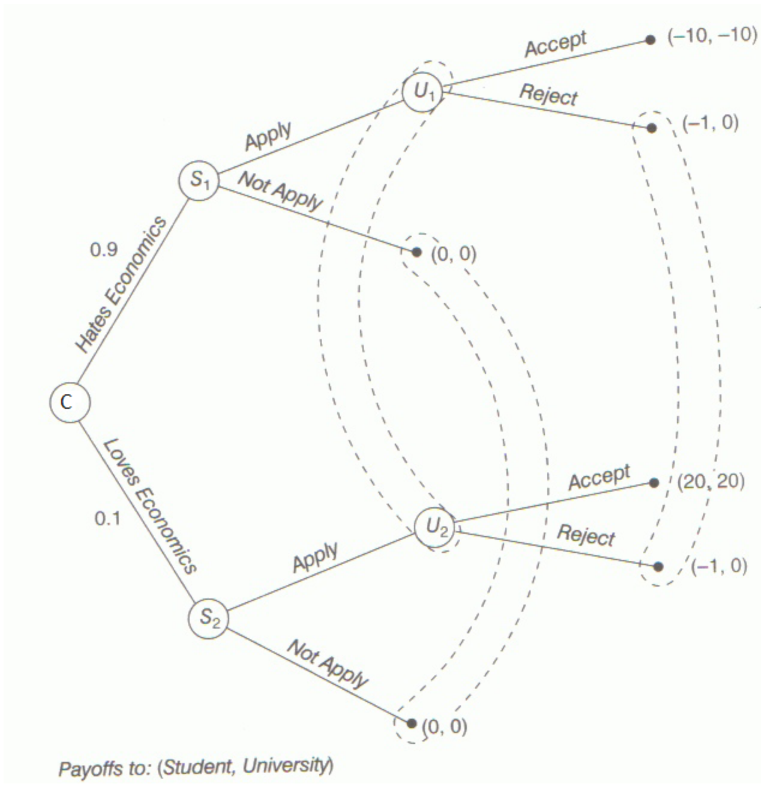
Potrzebujemy nowego pojęcia, które w pewnym sensie łączy w sobie zalety równowagi stabilnej względem podgier (SPNE) oraz równowagi Bayesa-Nasha dla statycznych gier z niedoskonałą informacją. W SPNE w grach z doskonałą informacją żądaliśmy by gracze postępowali optymalnie począwszy od dowolnego wierzchołka. Oczywiście to jest zbyt daleko idące żądanie gdy gracze mogą nie być pewni w którym wierzchołku się znajdują.

PRZYKŁAD - sekwencyjne *matching pennies* z niedoskonałą informacją: Gracz 1 wybiera orła lub reszką;; następnie wybiera Gracz 2, nie wiedząc co wybrał Gracz 1. Oczywiście nie może zawsze wybrać optymalnie. Może jednak wybrać optymalnie względem swojego aktualnego przekonania na temat dotychczasowego przebiegu gry.

Pojęcia równowagi dla gier dynamicznych z niepełną informacją

(tym razem odpuścimy sobie formalną definicję)

Równowaga będzie składać się ze strategii oraz przekonań, zdefiniowanych dla każdego zbioru informacyjnego. Strategie muszą być optymalne, w każdym zbiorze informacyjnym, dla danych przekonań. Natomiast przekonania muszą wynikać z równowagowych strategii (wszystkich graczy), w zgodzie z twierdzeniem Bayesa. Pytanie polega na tym jakie ograniczenia narzucimy na przekonania w tych przpadkach, w których twierdzenia Bayesa niczego nam nie mówi, bo zgodnie z równowagowymi strategiami w ogóle nie powinniśmy się znaleźć w danym zbiorze informacyjnym. Doskonała równowaga bayesowska (*Perfect Bayesian equilibrium* nie nakłada tu żadnych ograniczeń, natomiast inne pojęcia (*"trembling hand"*,*"sequential equilibrium"* nakładają mniej lub bardziej wyrafinowane ograniczenia.



Rysunek 8: PhD admissions game (Rasmusen)

(Nieformalna) DEFINICJA *Kryterium intuicyjnego* (Cho and Kreps, 1987): jeśli jest jakiś typ poinformowanego gracza, który nigdy nie zyskuje na wykonaniu akcji nie należącej do strategii równowagowej (niezależnie jakie przekonanie wywoła to u graczy niepoinfomowanych), a czasem na nim traci, to gracze niepoinfomowani muszą przypisywać temu typowi prawdopodobieństwo zero po zaobserwowaniu tej akcji.

Tu: $p(\text{hater}|\text{applied})=0$, więc kandydat powinien zostać przyjęty; zatem wykluczamy równowagę łączącą.

Przykład: model edukacji Spence'a.

Pracownik (wysyłający sygnał) zna swój talent θ, podczas gdy pracodawca (odbierający sygnał) – nie zna go. Wartość pracownika dla pracodawcy równa jest wartości oczekiwanej θ_1; załóż, że pracodawca płaci pracownikowi pensję w, równą tej wartości oczekiwanej (założenie to ma sens w warunkach doskonałej równowagi). Przykładowa funcja użyteczności pracodawcy, która istotnie skłoni go do takiego postępowania to $U(w, \theta) = -(w - \theta)^2$. Pracownik wysyła sygnał wybierając swój poziom wykształcenia e. Jego wypłata będzie równa $w - e/\theta$ (oznacza to, że uzyskanie wyższego wykształcenia jest łatwiejsze dla osobników utalentowanych–z wysokim θ). Talent pracownika jest niski (θ_L) z prawdopodobieństwem p_L lub wysoki (θ_H) z prawdopodobieństwem $p_H = 1 - p_L$. Istnieją dwa typy równowag:

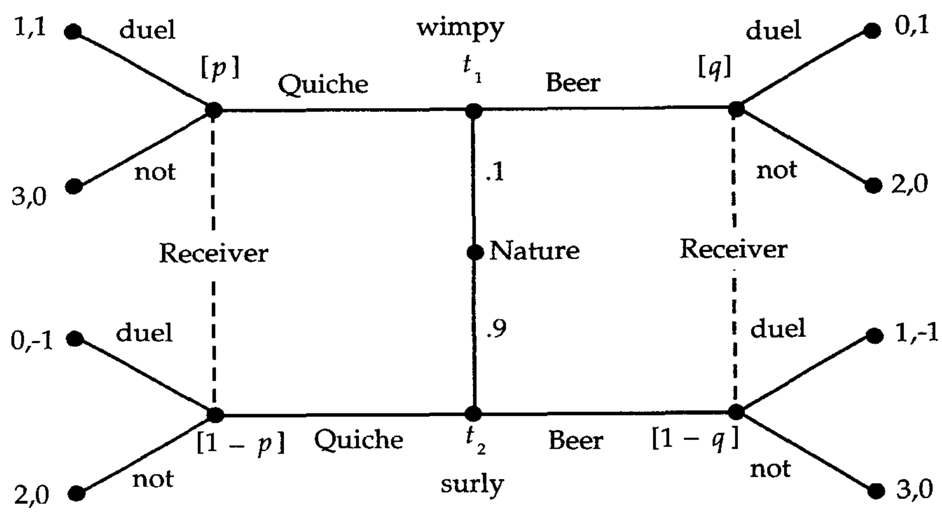
Równowaga łącząca. Jeśli pracodawcy nie róznicują pensji między pracownikami wykształconymi i niewykształconymi, ta pensja musi wynosić $w^* = p_H\theta_H + p_L\theta_L$. Obie grupy uzyskają ten sam poziom wykształcenia, $e_L = e_H = e^*$. Jakie są możliwe poziomy e^*? Jeśli obserwując odstępstwo od tego poziomu pracodawca przyjmuje, że ma do czynienia z pracownikiem o niskim talencie, jest skłonny płacić mu $w = \theta_L$. Spośród takich odstępstw najkorzystniejsze będzie oczywiście wybranie poziomu wykształcenia 0. Zatem by nie było ono korzystne (co jest warunkiem równowagi) musi zachodzić $\theta_L \leq w^* - e^*/\theta_L$ lub $e^* \leq \theta_L p^H(\theta_H - \theta_L)$.

Równowaga separująca. W tego typu równowadze pracownicy utalentowani i nieutalentowani wybierają różne poziomy wykształcenia. Oczywiście $e_L = 0$ (bo po co się starać jeśli i tak nie docenią). Nikomu nie opłaca się przerzucać na akcję właściwą dla drugiego typu jeśli

$$\begin{aligned} \theta_L &\geq \theta_H - e^H/\theta_L \\ \theta_H - e_H/\theta_H &\geq \theta_L. \end{aligned} \tag{35}$$

Innymi słowy, $\theta_L(\theta_H - \theta_L) \leq e^H \leq \theta_H(\theta_H - \theta_L)$. Ponieważ $\theta_H > \theta_L$, równowaga separująca zawsze istnieje.

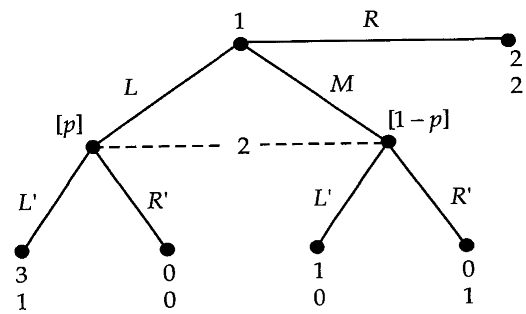
Możemy teraz zastosować Kryterium Intuicyjne by wskazać najbardziej prawdopodobną z tych równowag. Zauważ, że nieutalentowani pracownicy nigdy nie będą chcieli uzyskać poziomu wykształcenia wyższego niż $\theta_L(\theta_H - \theta_L)$, bo to nie mogłoby przynieść im korzyści. Zatem zostaje równowaga separująca w której $e^H = \theta_L(\theta_H - \theta_L)$.



Rysunek 9: Beer-quiche game

Negocjacje

- typowy sposób ustalenia ceny i innych warunków transakcji gdy $n = 2$
- strony powinny dogadać się od razu w przypadku pełnej informacji
- np. musimy uzgodnić jak podzielić ustaloną kwotę by ją otrzymać
- (w praktyce, możemy nawet wówczas się nie zgodzić, gdy mamy sprzeczne przekonania o tym ile komu się należy)
- dużo trudniej się porozumieć w przypadku prywatnej informacji
- np. trudniej o ugodę gdy zarówno pozew jak i pozwany optymistycznie oceniają swoje szanse w sądzie



Rysunek 10: Perfect Bayesian is not enough

Non-Transferable Utility: Schemat arbitrażowy Nasha

- Dwóch graczy musi się porozumieć co do rozwiązania $(x*, y*)$
- Zbiór dostępnych rozwiązań S to wypukły zbiór w R^2, gdzie i-ta $(i = 1, 2)$ współrzędna interpretowana jest jako użyteczność gracza i
- Jeden jego punkt jest wyróżniony: użyteczności jakie osiągna w przypadku braku porozumienia. Bez straty ogólności przyjmiemy, że to punkt $(0, 0)$
- aksjomaty:
  - rozwiązanie powinno być Pareto-efektywne
  - gdy S jest symetryczny względem $x = y$, to $x* = y*$
  - przemnożenie wszystkich użyteczności jednego z graczy przez stałą nie powinno zmieniać poziomu użyteczności drugiego gracza (niezależność od skali)
  - jeśli $(x*, y*)$ jest rozwiązaniem dla S, a Q jest podzbiorem S i $(x*, y*)$ do niego należy, to $(x*, y*)$ jest rozwiązaniem dla Q.
- łatwo pokazać, że te aksjomaty spełnia tylko punkt maksymalizujący iloczyn xy.

- rozważmy “grę w żądania”: obaj gracze jednocześnie składają żądania x, y. Dana jest funkcja $p(x, y)$ dająca prawdopodobieństwo, że są one kompatybilne. Ciąg równowag Nasha takich gier zbiega do rozwiązania Nasha w miarę jak $p(x, y)$ zbiega do 1 na S i 0 poza S.

Model negocjacji dla *transferable utility*: gra przetargu ultymatywnego (UG)

Ogólne założenia do wszystkich następnych modeli: $n = 2$ graczy, "ciastko" o wartości v do podziału

- Gracz 1 proponuje podział (x, y), gdzie $x + y = v$
- Gracz 2 akceptuje tę propozycję, która zostaje wdrożona, lub ją odrzuca, co daje wypłaty $(0, 0)$
- oznaczmy najniższą propozycję, którą Gracz 2 jest skłonny przyjąć przez MAO
- istnieje continuum równowag: dowolne $0 \leq y = MAO \leq 1$ jest równowagą.
- tylko $y = MAO = 0$ jest SPNE (ew. też $x = MAO = \epsilon$, gdzie ϵ jest najniższą dodatnią propozycją (np. 1 grosz).
- w praktyce najczęstsza oferta to $y = v/2$, a niższe są często odrzucane

Gra przetargu ultymatywnego z niedoskonałą informacją

- jak standardowa UG, ale najpierw natura losuje rozmiar ciastka v lub $V(> v)$
- tylko Gracz 1 zna wynik losowania
- Gracz 2 musi przyjąć lub odrzucić ofertę y nie wiedząc czy Gracz 1 dostanie $v - y$ czy $V - y$
- W praktyce najczęstszą ofertą jest $y = v/2$ – niezależnie czy rozmiar ciastka to v czy V(!)

Negocjacje dwuetapowe

- jak UG, ale jeśli pierwsza oferta zostanie odrzucona, gracz 2 może złożyć kontrpropozycję.
- ta podgra przebiega jak UG, z tym, że w międzyczasie ciastko "schnie", wobec czego $y_2 + x_2 = v\delta$ $(0 \leq \delta < 1)$
- znów, równowag Nasha jest mnóstwo
- jeśli pierwsza oferta zostanie odrzucona, gracz 2 może wziąć wszystko, czyli $y_2 = v\delta$.
- by zatem nie odrzucił pierwszej oferty, musi dostać $y = v\delta$. Dla Gracza 1 zostaje $(1 - \delta)v$
- (UG to specjalny przypadek $\delta = 0$)

Nieskończone negocjacje

- potencjalnie nieskończona sekwencja ofert. Ciastko jest warte $v, \delta v, \delta^2 v$ itd.
- szukamy symetrycznej, stacjonarnej równowagi (nazwy graczy i historia nie mają wpływu na oferty)
- oznaczmy równowagowe wypłaty $x^*, 1-x^*$. Jeśli gracz 2 odrzuci, to wchodzi w buty gracza 1, zatem powinien zaproponować podział $\delta(1-x^*, x^*)$. Z tego wynika, że $1-x^* = \delta x^*$, czyli $x = \frac{1}{1+\delta}$. Oczywiście dla gracza 2 zostaje $\frac{\delta}{1+\delta}$ i ta propozycja zostanie przyjęta (w pierwszym kroku potencjalnie długich przecież negocjacji).

Nieskończone negocjacje z różnymi stopami dyskontującymi (to tzw. model Rubinsteina btw.)

oznaczmy równowagowe wypłaty $x^*, 1-x^*$. Jeśli gracz 2 odrzuci, to składa propozycje $y^*, 1-y^*$. Gdy i ta zostanie odrzucona, 1 ponownie złoży $x^*, 1-x^*$. Zatem gracz 2 chcąc by jego oferta została przyjęta musi uczynić ją akceptowalną dla gracza 1: $y^* \geq \delta_1 x^*$. W istocie, by nie tracił niepotrzebnie, mamy

$$y^* = \delta_1 x^*.$$

Analogicznie mamy

$$1 - x^* = \delta_2(1 - y^*).$$

Możemy zatem podstawić:

$$1 - x^* = \delta_2(1 - \delta_1 x^*) = \delta_2 - \delta_1\delta_2 x^*$$

$$x^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}$$

Negocjacje z niedoskonałą informacją

Dwa etapy: gracz 1 składa żądanie. Jeśli zostanie odrzucone, ciastko schnie (współczynnik δ dla obu) i ponownie gracz 1 składa propozycję. 0 dla obu jeśli i ta odrzucona. Tylko gracz 2 zna prawdziwą wartość ciastka V, o rozkładzie jednostajnym na $[0, M]$. Załóżmy, że w równowadze gracz 1 żąda x_1 w pierwszej rundzie i x_2 w drugiej (jeśli x_1 odrzucone). Czyli graczowi 2 opłaca się przyjąć gdy

$$V - x_1 \geq \delta(V - x_2)$$

i oczywiście

$$V - x_1 \geq 0$$

Czyli gracz 2 jest akurat indyferentny gdy wartość ciastka wynosi

$$\bar{V} = \max\{x_1, \frac{x_1 - \delta x_2}{1 - \delta}\}.$$

Czyli po odrzuceniu x_1 można się spodziewać, że ciastko ma wartość jednostajną na $[0, \bar{V}]$. Oczywiście wtedy optymalne x_2 to $\bar{V}/2$. Zatem $x_1 = \bar{V}(2-\delta)/2$. Czyli z punktu widzenia gracza 1 mamy taki problem optymalizacyjny:

$$\max_{x_1} x_1 \frac{M - \bar{V}}{M} + \delta x_2 \frac{\bar{V} - x_2}{M}$$

wygodniej będzie optymalizować względem $\bar{V}$. Podstawmy więc x_1 jako funkcję $\bar{V}$. Podstawmy także optymalne x_2. Wreszcie, można też zapomnieć o M w mianowniku:

$$\max_{\bar{V}} \frac{\bar{V}(2-\delta)(M - \bar{V})}{2} + \frac{\delta \bar{V}^2}{4}$$

Warunek pierwszego rzędu:

$$(2 - \delta)(M - \bar{V} - \bar{V}) + \delta \bar{V} = 0$$

$$\bar{V} = \frac{2 - \delta}{4 - 3\delta} M.$$

zatem

$$x_1 = \frac{(2-\delta)^2}{2(4 - 3\delta)} M$$

i oczywiście

$$x_2 = \frac{2 - \delta}{2(4 - 3\delta)} M.$$

Warto zauważyć, że $x_2 \leq x_1$. Gdy ciastko jest małe, gracz 2 odrzuca pierwsze żądanie by dostać lepszą ofertę (choć z poślizgiem). Gdy $\delta = 1$, druga runda nie ma znaczenia.

Gra na wycieńczenie jako prosty model negocjacji

Dwóch graczy, jedno dobro, warte $v_i > 0$ dla gracza i. Każdy z graczy może w dowolnej chwili zrezygnować (otrzymując 0). Czas gra rolę: do chwili gdy pierwszy gracz zrezygnuje, każdy z graczy traci c zł na jednostkę czasu. Każdy z graczy otrzymuje połowę gdy zrezygnują jednocześnie. Możemy przyjąć, że jednocześnie każdy znich określa swój maksymalny czas gry, t_i. Wcześniej rozważaliśmy asymetryczne równowagi modelu z doskonałą informacją: $t_1 = 0, t_2 \geq v_1/c_1$ oraz $t_1 \geq v_2/c_2, t_2 = 0$ (czyli może wygrać gracz, dla którego dobro ma mniejszą wartość; rozwiązanie jest efektywne – gra kończy się natychmiast). Rozważmy teraz grę z niedoskonałą informacją: załóżmy, że z pewnym prawdopodobieństwem, z_j, gracz j nie jest skłonny nigdy się poddać (typ 'szaleńca'). Natomiast dla uproszczenia przyjmiemy $c_1 = c_2 = c$. Oznaczmy dystrybuantę rozkładu momentów wyjścia dla gracza i przez G_i i odpowiednio jego gęstość przez g_i. Ta gęstość faktycznie jest dobrze określona przynajmniej dla $t > 0$, bo nie warto rezygnować w konkretnym momencie $t > 0$ z dodatnim prawdopodobieństwem – widzieliśmy już podobne przypadki w teorii aukcji i w mieszanych równowagach gier w ustalanie ceny. Po drugie, gdy już jest niezerowe, $G_i(t)$ powinno być ściśle rosnące aż osiągnie wartość $1 - z_i$. Bo gdy jest stałe dla i na jakimś przedziale (t, t') a potem znów rosnie, to nie ma powodu by j rezygnował w tym przedziale, więc nie ma powodu by i rezygnował na $[t', t' + \epsilon]$ (raczej niż w momencie t). Każdy z graczy w każdym momencie, w którym czasem rezygnuje ($g > 0$) musi mieć oczekiwaną korzyść z walki jeszcze przez chwilę równą jej kosztowi:

$$v_i \frac{g_j(t)}{1 - G_j(t)} = c$$

$$v_j \frac{g_i(t)}{1 - G_i(t)} = c$$

(ułamek z LHS to gęstość prawdopodobieństwa, że przeciwnik zrezygnuje o ile dotychczas nie zrezygnował). Łatwo stwierdzić, że daje to:

$$G_i(t) = 1 - (1 - G_i(0))e^{-tc/v_j}.$$

Istotnie, wówczas

$$g_i(t) = -\frac{c}{v_i}(1 - G_i(0))e^{-tc/v_j}.$$

$G_i(0)$ musi być zerowe dla przynajmniej jednego z graczy (inaczej opłacałoby się poczekać ϵ).

Ponadto każdy z graczy, o ile nie jest szaleńcem, powinen się natychmiast poddać gdy już wie, że przeciwnik na pewno jest szaleńcem. Zatem maksymalny czas gry nie-szalonego gracza i musi być taki sam co nie-szalonego gracza j, oznaczmy go przez T. Mamy:

$$G_i(T) = 1 - (1 - G_i(0))e^{-Tc/v_j} = 1 - z_i.$$

Rozwiązując dla T dostaniemy:

$$T = -\frac{v_j}{c} ln \frac{z_i}{1 - G_i(0)}.$$

Oczywiście analogicznie:

$$T = -\frac{v_i}{c} ln \frac{z_j}{1 - G_j(0)}.$$

Zatem dopuszczenie nawet niewielkiego prawdopodobieństwa, że przeciwnik nigdy nie ustąpi pozwala nam znaleźć jednoznaczną równowagę Stąd możemy stwierdzić jak mają się do siebie $G_i(0)$ i $G_j(0)$. Mianowicie jeśli $\frac{v_j}{c} \ln z_i < \frac{v_i}{c} \ln z_j$ (przeciwny przypadek analogiczny) to $-ln \frac{1}{1-G_i(0)} > -ln \frac{1}{1-G_j(0)}$ czyli $ln(1 - G_i(0) > ln(1 - G_j(0))$ czyli musimy mieć $G_i(0) = 0$ i $G_j(0) > 0$. A konkretnie:

$$G_j(0) = 1 - z_j z_i^{v_i/v_j}$$

otrzymamy:

$$G_i(t) = 1 - e^{tc/v_i}$$

$$G_j(t) = 1 - z_j z_i^{v_i/v_j} e^{tc/v_j}.$$

Zatem mamy jedyną równowagę, która ma przyjemne *comparative statics*. W szczególności gdy i z wysokim prawdopodobieństwem jest szaleńcem albo bardzo zależy mu na wygraniu, to raczej przeciwnik od razu odpuści.

Reputacja w negocjacjach powtarzalnych

Gracz Trwały (GT) negocjuje podział ciastka wartości 1 z kolejnymi partnerami (żyjącymi jedną rundę), którzy znają wynik poprzednich negocjacji. Najprostszy model: nieskończona sekwencja partnerów, współczynnik dyskonta δ, przetarg ultymatywny: partner proponuje podział ciastka, GT akceptuje lub nie. Oczywiście gdy liczą się tylko bieżące negocjacje $\delta = 0$, jedyną równowagą stabilną względem podgier jest ta, w której partner żąda wszystkiego a GT akceptuje żądanie. Oczywiście jest to także równowagą stabilną względem podgier dla każdego innego δ. Ale nie jedyną! Rozważmy następujący profil strategii:

Gracz Trwały: w pierwszej rundzie akceptuje wtedy i tylko wtedy gdy proponują co najmniej x. W kolejnych akceptuje wtedy i tylko wtedy gry proponują co najmniej najmniejszą kwotę, którą kiedy kolwiek zaakceptował
Partnerzy: proponują mniejszą z liczb: x lub najniższą ofertę kiedykolwiek zaakceptowaną przez GT.

Oczywiście partnerom nigdy nie opłaca się odstąpić od takiej strategii. GT może chcieć od swojej odstąpić (tu: zaakceptować) gdy zaproponowali mu pewne $y < x$. Zyska wówczas natychmiast y ale w każdej z kolejnych rund straci $x - y$, łącznie $(x - y)\delta/(1 - \delta)$. Czyli by nie zarobił na tym odstąpieniu od równowagi, musimy mieć

$$y \leq (x - y)\delta/(1 - \delta)$$

np. dla $\delta = 1/2$ mamy $y < x/2$. Czyli nie skusi się gdy proponują mu bardzo mało. Ale gdy więcej, opłaca się odstąpić, zatem to nie jest równowaga. Ogóniej, obliczmy graniczne y:

$$y(1 + \delta/(1 - \delta)) = x\delta/(1 - \delta)$$

$$y(1/(1 - \delta)) = x\delta/(1 - \delta)$$

$$y = x\delta$$

Czyli gdy GT jest bardzo cierpliwy mamy "prawie" SPNE, ale jednak nie. Najwyraźniej kara dla GT za zaakceptowanie niskiej oferty nie jest wystarczająca. Rozważmy taką parę strategii:

Gracz Trwały: w pierwszej rundzie akceptuje wtedy i tylko wtedy gdy proponują co najmniej x. W kolejnych jak wyżej, ale jeśli kiedykolwiek zaakceptuje coś mniejszego, odtąd akceptuje wszystko
Partnerzy: proponują x, chyba, że GT kiedykolwiek zaakceptował coś mniejszego, wtedy 0.

Czyli gdy GT zaakceptuje pewne $y < x$, zyska y ale straci $x\delta/(1-\delta)$. By zatem nie zyskał na tym musimy mieć:

$$y \leq x\delta/(1-\delta)$$

W szczególności dla $\delta \geq 1/2$ to jest spełnione dla każdego $y < x$. Czyli nie ma sytuacji, w której opłaca się odstąpić od swojej strategii, zatem mamy SPNE. To jest rodzinę SPNE, bo x może być dowolne z przedziału $[0, 1]$. Warto rozważyć jeszcze taką strategię:

Gracz Trwały: zawsze akceptuje gdy wtedy i tylko wtedy gdy proponują co najmniej x.

GT stał się twardszy – ma wyższe progi akceptacji oferty. w rezultacie najlepszą odpowiedzią Partnerów staje się zawsze proponować x. Ale, paradoksalnie, to czyni równowagę mniej stabilną. Istotnie, tu w każdej podgrze partnerom opłaca się oczywiście oferować x. Zatem gdy partner odstąpi, oferując $y < x$, to opłaca się zaakceptować, bo to nie obniża przyszłych wypłat. Czyli to nie jest SPNE! (zatem być może partnerom jedna opłaca się odstąpić?).

Generalnie, perspektywa przyszłych, analogicznych negocjacji, nawet z innymi graczami, zwiększa naszą siłę przetargową, bo powoduje, że nie opłaca nam się ustępować. To jeden z powodów, dla których „duzi" gracze (którzy prowadzą wiele negocjacji) są silniejsi. To także pomaga zrozumieć jak nie zostać, *pardon my French*, "cwelem" (zob. "Gry więzienne" Kamińskiego).