

Teoria gier

dodatkowe zadania 2021-22

Michał Krawczyk

1. Właściciel może pilnować magazynu A albo B. Jednocześnie złodziej decyduje, do którego z nich spróbować się włamać. Próba się uda jeśli magazyn będzie niepilnowany, wówczas właściciel straci, a złodziej zyska przechowywane tam towary. Zawartość magazynu A jest warta 1. Rozwiąż grę w trzech przypadkach:
 - (a) Towary w B są warte 1
 - (b) Towary w B są warte 2
 - (c) Właściciel wie, który z przypadków zachodzi, a złodziej przypuszcza, że towary w B mają wartość 2 z prawdopodobieństwem w i wartość 1 w p.p. (w tym podpunkcie znajdź równowagę Bayesowską, a więc podaj p-stwa pilnowania B zależnie od tego czy towary tam przechowywane są cenniejsze czy nie i (bezwarunkowe) p-stwo włamania się do B).
2. W aukcji bierze udział trzech kupujących. Ich prywatne wyceny oferowanego dobra są losowane niezależnie z rozkładu o dystrybucie $F(v)$. Dobro otrzyma ten, kto złoży najwyższą ofertę, a cena, którą zapłaci będzie równa trzeciej najwyższej (czyli tu: najniższej) ofercie.
 - (a) Wykaż, że licytowanie poniżej prawdziwej wyceny $b < v$ jest słabo zdominowane
 - (b) Wykaż, że licytowanie prawdziwej wyceny, $b = v$ NIE jest strategią słabo dominującą
 - (c) (*) Wykaż, że dla pewnego $\epsilon > 0$ strategia $b = v + \epsilon$ przyniesie wyższą oczekiwaną wypłatę niż strategia $b = v$
 - (d) Czy gracz wykazujący awersję do ryzyka będzie skłonny, dla danej wyceny, licytować wyżej czy niżej niż gdyby był neutralny wobec ryzyka? Porównaj ten wynik do przypadku aukcji pierwszej ceny.

Teraz załóż, że na aukcji są dwa identyczne przedmioty. Każdy kupujący zainteresowany jest tylko jedną sztuką, z wycenami rozłożonymi jak wyżej. Dwóch kupujących składających najwyższe oferty otrzyma po jednej sztuce, płacąc trzecią ofertę. np. gdy $b_1 = 10, b_2 = 4, b_3 = 8$, to kupujących 1 i 3 otrzymają dobro po cenie 4.

- (e) Wskaż strategię słabo dominującą
 - (f) Podaj przykład równowagi, w której niektórzy gracze wybierają inne strategię.
3. Rozważmy przypadek n -osobowej aukcji, w której wyceny są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$, a uczestnicy są neutralni wobec ryzyka. Rozważmy aukcję pierwszej ceny, drugiej ceny i all-pay.
- (a) Wykaż korzystając bezpośrednio z wzorów (nie z RET), że i) oczekiwany zysk uczestnika dla danej wyceny v oraz ii) oczekiwany przychód sprzedającego jest taki sam w każdym formacie aukcji. Przykładowo, w aukcji drugiej ceny $b = v$, zatem p-stwo, że przychód sprzedającego w aukcji drugiej ceny wyniesie x jest równe p-stwu, że druga najwyższa wycena wyniesie x . Zatem jeden uczestnik musi mieć wyższą wycenę (p-stwo $1-x$) i można go wybrać na n sposobów, jeden uczestnik musi mieć wycenę dokładnie x (gęstość p-stwa 1) i można go wybrać na $n-1$ sposobów, a pozostałych $n-2$ uczestników musi mieć mniejsze wyceny (p-stwo x^{n-2}). Interesuje nas wartość oczekiwana drugiej najwyższej wyceny, więc trzeba to przemnożyć przez x i scałkować od 0 do 1.
 - (b) A który format będzie preferowany w przypadku awersji do straty (np. $U(x) = x$ dla $x \geq 0$, ale $U(x) = \lambda x$, gdzie λ jest stałą większą od 1)?