Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

Egzamin XXVII dla Aktuariuszy z 12 października 2002 r.

Część I

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas egzaminu: 100 minut

Ośrodek Doskonalenia Kadr Resortu Finansów, Warszawa 12 października 2002 r.

1. Bank A udzielił klientowi pożyczki L, która ma być mu przekazana w formie renty pewnej natychmiast płatnej, o równych płatnościach dokonywanych na początku każdego roku przez okres 5 lat. Wiadomo, że każda rata pożyczki ma być spłacona jak oddzielny kredyt przy użyciu renty pewnej natychmiast płatnej, o równych płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku przez okres 3 lat. W chwili dokonania pierwszej płatności z tytułu pożyczki okazało się, że pożyczkobiorca jest tak zwanym klientem niesolidnym. O kliencie niesolidnym wiadomo, że spłaca każdy zaciągnięty kredyt przy użyciu obniżonej raty $\overline{R}_k$ płatnej na końcu roku k:

$$\overline{R}_k = \frac{100 - 5 \cdot k}{100} \cdot R_k, \qquad k \in \{1, 2, 3\};$$

gdzie R_k oznacza ratę kredytu która powinna zostać oryginalnie opłacona. Wiadomo też, że klient niesolidny nigdy nie zwróci zaległych kwot. W związku z tym Bank A natychmiast zdeponował w Banku B fundusz rezerwowy w wysokości $0.2 \cdot L - 3\,000$ dokładnie takiej, aby wystarczyła na coroczne wpłaty na rzecz Banku A w wysokości równej różnicy pomiędzy łączną wpłatą, która miała być dokonana przez pożyczkobiorcę a wpłatą faktyczną. Bank B będzie dokonywał wpłat rekompensacyjnych do Banku A zawsze natychmiast po wpłacie dokonanej przez pożyczkobiorcę. Wiadomo, że efektywna roczna stopa procentowa przy której skalkulowano wysokość rat płaconych przez pożyczkobiorcę wynosi $i = 22\%$ oraz że efektywne roczne oprocentowanie depozytu złożonego w Banku B wynosi $j = 10\%$. Proszę obliczyć wysokość łącznej kwoty pożyczki L.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 25 000

B. 30 000

C. 35 000

D. 40 000

E. 45 000

2. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

C - cena europejskiej opcji *Call*

P - cena europejskiej opcji *Put*

E - cena wykonania opcji

S - obecna cena akcji

n - okres do wykonania opcji

δ - natężenie oprocentowania, $\delta > 0$

x - cena akcji w chwili wykonania

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

(i) Dla opcji europejskiej jeżeli $C > P$ to $E < S \cdot exp(\delta)$,

(ii) Dla amerykańskiej opcji kupna jeżeli n rośnie to jej cena też rośnie,

(iii) Cena opcji amerykańskiej jest zawsze większa od ceny opcji europejskiej,

(iv) Wypłatę $W(x)$ daną wzorem $W(x) = \begin{cases} 2 & dla\ x < 6 \\ x-4 & dla\ 6 \le x < 8 \\ 4 & dla\ x \ge 8 \end{cases}$ można otrzymać poprzez

następującą strategię inwestycyjną:

Sprzedaż opcji *Call* przy cenie wykonania *8*,

Zakup opcji *Put* przy cenie wykonania *6*,

Zakup opcji *Call* przy cenie wykonania *4*,

Sprzedaż opcji *Put* przy cenie wykonania *4*.

Odpowiedź:

A. tylko (i), (ii)

B. tylko (i), (ii), (iii)

C. wszystkie (i), (ii), (iii) oraz (iv)

D. tylko (ii), (iii) oraz (iv)

E. żadna z odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawidłowa

3. O pewnej inwestycji wiadomo, że w chwili $t = 0$ oraz w chwili $t = 2$ należy wpłacić odpowiednio $P_0 = 504$ oraz $P_2 = 2\ 400$, natomiast w chwili $t = 1$ oraz $t = 3$ otrzymuje się odpowiednio $B_1 = 1\ 910$ oraz $B_3 = 1\ 000$. Które z poniższych sformułowań dotyczących tej inwestycji są prawdziwe:

(i) istnieją dokładnie dwie wewnętrzne stopy zwrotu (*internal rate of return*), z których jedna wynosi $i_1 = 25\%;$

(ii) wartość obecna tej inwestycji (*net present value*) jest funkcją rosnącą stopy zwrotu i dla $i \in < \frac{25}{100}; \frac{30}{100} >$;

(iii) dla $v \in < \frac{60}{100}; \frac{91}{100} >$ wartość obecna tej inwestycji (*net present value*) jest minimalizowana dla $v_1 = \frac{60}{100}$, a maksymalizowana dla $v_2 = \frac{91}{100}$.

Odpowiedź:

A. tylko (ii)

B. tylko (i) oraz (ii)

C. tylko (i) oraz (iii)

D. tylko (ii) oraz (iii)

E. żadna z odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawidłowa

4. Dany jest pakiet *10* obligacji o kuponach płatnych półrocznie w wysokości *50* każdy oraz wartości wykupu równej *1 000*. Termin wykupu obligacji przypada co rok począwszy od końca *10* roku tj. pierwsza obligacja zapada na końcu *10* roku, druga na końcu *11* roku, …, dziesiąta obligacja zapada na końcu *19* roku. Inwestor bierze kredyt na zakup obligacji w wysokości *70%* wartości zakupu obligacji, a za pozostałą część płaci z własnych środków. Odsetki otrzymane z obligacji są reinwestowane w funduszu. Inwestor po dwóch latach sprzedaje pakiet obligacji, wycofuje środki z funduszu i spłaca kredyt w całości wraz z należnymi odsetkami.

Oblicz efektywną roczną stopę zwrotu i z zainwestowanych własnych środków, jeżeli wiadomo że:

(i) cena zakupu pakietu obligacji została ustalona przy stopie procentowej $i_1^{(2)} = 10\%$,

(ii) cena sprzedaży pakietu obligacji została ustalona przy stopie procentowej $i_2^{(2)} = 6\%$,

(iii) fundusz, w którym inwestowane są środki otrzymane z zapadłych kuponów są reinwestowane przy stopie $i_3^{(2)} = 8\%$,

(iv) kredyt na sfinansowanie zakupu jest oprocentowany przy stopie $i_4^{(2)} = 16\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 22%

B. 32%

C. 42%

D. 52%

E. 62%

5. Dane są dwie pożyczki A oraz B oprocentowane przy efektywnej rocznej stopie procentowej i i spłacane w następujący sposób:

- pożyczka A jest spłacana na końcu każdego roku przez okres *2n* lat przy użyciu płatności będących sumą stałej raty kapitałowej w wysokości $\frac{1}{i}$ oraz raty odsetkowej równej odsetkom narosłym w bieżącym roku,
- pożyczka B jest spłacana na końcu każdego roku przez okres n lat za pomocą równych spłat, każda w wysokości 1.

Niech:

(i) dla pożyczki A wartość obecna odsetek *(net present value)* zapłaconych w ciągu ostatnich n lat wyznaczona na dzień udzielenia pożyczki wynosi X,

(ii) dla pożyczki B suma wszystkich zapłaconych odsetek wynosi Y.

Podaj wyrażenie na n:

Odpowiedź:

A. $\dfrac{iY^2 + Y - iX}{iY}$

B. $\dfrac{iY^2 - X - iX}{iY}$

C. $\dfrac{iY^2 - X - iX}{iX}$

D. $\dfrac{iX^2 + Y - iX}{iX}$

E. żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawidłowa

6. Dla odroczonej renty płatnej rocznie w wysokości *1* wiadomo, że :

(i) $\lim\limits_{i \to \infty} (\bar{d}) = 5$,

(ii) $\lim\limits_{i \to 0} (\bar{d}) = 10$, gdzie $\bar{d}$ oznacza *duration* renty.

Wyznacz wartość obecną renty *(net present value)* przy stopie $i = 5\,\%$.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 5.30

B. 5.80

C. 6.30

D. 6.80

E. 7.30

7. Zysk $P(t)$ ze sprzedaży pewnego ubezpieczenia zawartego na okres *20* lat zależy wyłącznie od wysokości składki *B* oraz roku *t* i zadany jest wzorem:

$$P(t)=\begin{cases}0.8\cdot(-1\,000+B) & dla \quad t=1\\ 0.04\cdot\{-100+B\cdot(t-1)\} & dla \quad t=2,\ldots,20;\end{cases}$$

gdzie *t =1, 2, ..., 20* oznacza rok trwania ubezpieczenia.

Wyznacz składkę *B* przy następujących założeniach:

(i) zysk $P(t)$ ze sprzedaży tego ubezpieczenia rozpoznawany jest na końcu każdego roku, a stała składka *B* jest opłacana na początku każdego roku trwania ubezpieczenia,

(ii) marża na sprzedaży ubezpieczenia rozumiana jako obecna wartość zysku ze sprzedaży podzielona przez obecną wartość składek wynosi *5%*,

(iii) wszystkie obliczenia zostały dokonane przy efektywnej rocznej stopie procentowej *i=15%.*

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 325

B. 350

C. 375

D. 400

E. 425

8. Rozważmy kredyt w wysokości *240 000*, który ma zostać spłacony w ciągu *20* lat i o którym wiadomo, że w ciągu pierwszego *10* – letniego okresu spłaty raty są płatne na końcu każdego roku oraz że w ciągu kolejnego *10* – letniego okresu spłaty raty są płatne na końcu każdego kwartału. Wiadomo też, że łączna zapłacona suma w ciągu każdego z dwóch rozpatrywanych okresów spłaty jest taka sama oraz że w trakcie każdego z nich wysokość raty pozostaje stała. Przy kalkulacji wysokości rat założono, że efektywna roczna stopa procentowa w trakcie pierwszego *10* – letniego okresu spłaty wynosi $i = 12\%$ oraz że nominalna roczna stopa procentowa w trakcie drugiego *10* - letniego okresu spłaty wynosi $i^{(4)} = 16\%$.

Natychmiast po zapłaceniu *16* raty kredytobiorca pożyczył dodatkowo kwotę *L*, w związku z czym bank zmodyfikował zasady spłaty obecnego łącznego zadłużenia. Wiadomo, że według nowego planu spłaty zmodyfikowana rata ma być płatna na końcu każdego miesiąca przez okres pozostający do końca oryginalnie ustalonego terminu spłaty oraz że jej wysokość pozostaje stała. Wiadomo też że przy kalkulacji zmodyfikowanej raty użyto nominalnej stopy procentowej $i^{(12)} = 18\%$.

Proszę obliczyć *L* jeśli wiadomo, że suma faktycznie zapłaconych odsetek jest o *15%* wyższa od sumy odsetek która zostałaby zapłacona gdyby nie nastąpiły żadne zmiany.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 38 242

B. 43 242

C. 48 242

D. 53 242

E. 58 242

9. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe:

(i) $$\sum_{t=1}^{\infty} v^t \cdot \left(\ddot{a}_{\overline{t}|} - a_{\overline{t}|}\right) = \frac{v}{1-v^2}$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial(i)}\{(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)}\} = (1-d)^{\frac{(2m-1)}{m}}(Ia)_{\overline{n}|}$$

(iii) $$\frac{s_{\overline{n}|j}}{1+is_{\overline{n}|j}} = \frac{a_{\overline{n}|j}}{1+(i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

Odpowiedź:

A. tylko (i)

B. tylko (ii)

C. tylko (iii)

D. tylko (i) oraz (iii)

E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

Uwaga: $\frac{\partial f}{\partial(x)}$ *oznacza pochodną funkcji f(x) argumentu x liczoną po tym argumencie.*

10. Proszę rozważyć rentę pewną natychmiast płatną o płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku przez okres n lat, w której pierwsza płatność wynosi $1\,000$, a każda kolejna płatność jest większa od płatności poprzedniej o $5\,00$. Wiadomo, że suma wszystkich wypłat dokonanych z tytułu tej renty wynosi $332\,500$.

Proszę również rozważyć rentę ciągłą natychmiast płatną o okresie wypłat n takim samym jak w przypadku renty poprzedniej i o intensywności wypłat w chwili t zadanej wzorem:

$$\varphi(t) = a \cdot t.$$

Wiadomo, że wartość obecna (*net present value*) obydwóch rent jest taka sama.

Proszę obliczyć ile wyniosłaby wartość obecna drugiej renty gdyby zmodyfikowano jej intensywność opłat w chwili t w sposób następujący:

$$\overline{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & dla\ t \le 5; \\ (a^{\frac{1}{3}} + 2) \cdot t, & dla\ \ 5 < t \le n. \end{cases}$$

Wszystkie obliczenia powinny być przeprowadzone przy założeniu, że czynnik dyskontujący v wynosi 0.9.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 723

B. 743

C. 763

D. 783

E. 803

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 października 2002 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi..

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	C	
5	A	
6	D	
7	E	
8	C	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.