1. Niech $A_X(t)$ oznacza wartość środków zgromadzonych w funduszu X w chwili t $(t > 0)$. Wiadomo, że wartość środków zgromadzonych w funduszu I w chwili t $(t > 0)$ wynosi $A_I(t) = 1 + \sqrt{t}/2$, natomiast w funduszu II $A_{II}(t) = 2 + t$. W jakiej chwili T natężenie oprocentowania w funduszu II równe będzie $2/3 \cdot T$ natężenia oprocentowania w funduszu I?

Odpowiedź:

A. 4.0

B. 3.5

C. 2.0

D. 1.7

E. brak jednoznacznego rozwiązania

2. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe:

(i) $$\frac{\partial}{\partial(i)}\{ i^{(m)} \cdot \sum_{t=1}^{m} v^{\frac{t}{m}} \} = m$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial(d)}\{ \ddot{a}_{\overline{n}|} - i \cdot (Ia)_{\overline{n}|} \} = -n^2 \cdot (1-d)^{n-1}$$

(iii) $$\bar{a}_{\overline{n}|} \cdot \frac{\partial}{\partial(i)}\{ \frac{a_{\overline{n}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}} \} = v \cdot \{ (\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|} \cdot \bar{a}_{\overline{n}|} \}$$

Odpowiedź:

A. tylko (i) oraz (ii)

B. tylko (i) oraz (iii)

C. tylko (ii) oraz (iii)

D. (i), (ii) oraz (iii)

E. żadna z odpowiedzi A, B, C oraz D nie jest prawidłowa

Uwaga: $\frac{\partial f}{\partial(x)}$ *oznacza pochodną funkcji f(x) argumentu x liczoną po tym argumencie.*

3. Kwota pożyczki L ma zostać spłacona przy użyciu nieskończonej renty pewnej, natychmiast płatnej, o stałych płatnościach dokonywanych na końcu każdego roku skalkulowanych przy efektywnej rocznej stopie procentowej i. W kontrakcie zawarto klauzulę, że spłacający może na końcu każdego roku oprócz bieżącej raty dodatkowo spłacić *10%* pozostałego zadłużenia. Ustalono, że na końcu każdego roku, w którym spłacający skorzysta z tej klauzuli będzie naliczana nowa stała wysokość raty. Okazało się, że spłacający zamierza skorzystać z tej klauzuli na końcu każdego roku. Niech I oznacza łączną kwotę odsetek do zapłacenia przez spłacającego. Wiadomo, że gdyby oryginalna kwota pożyczki wynosiła $1.2 \cdot L$ oraz gdyby efektywna roczna stopa procentowa wynosiła $1.1 \cdot i$ to łączna kwota odsetek wynosiłaby $1.1 \cdot I + 5\,000$ przy niezmienionym założeniu, że spłacający skorzystał z klauzuli na końcu każdego roku. Ile wynosiła łączna kwota odsetek I do zapłacenia przez spłacającego?

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 14 700

B. 16 700

C. 18 700

D. 20 700

E. 22 700

4. Rozważmy *2 – letni* kredyt, o którym wiadomo, że w pierwszym roku raty są płatne na końcu każdego miesiąca, a w drugim roku na końcu każdego kwartału. Wiadomo również, że raty są stałe w poszczególnych latach i że gdyby wysokość rat płatnych w pierwszym roku wzrosła o *20%*, to pozwoliłoby to na obniżenie wysokości rat w drugim roku o *30%*. Obliczono, że suma wszystkich zapłaconych odsetek równa jest sumie pierwszych sześciu rat zapłaconych w pierwszym roku pomniejszonej o *3 000*. Ile wyniosłaby wysokość raty płaconej w pierwszym roku, gdyby efektywna miesięczna stopa procentowa została obniżona do poziomu $i' = 1\%$ z oryginalnego poziomu $i = 1.2\%$ przy założeniu, że stosunek sum rat zapłaconych w roku pierwszym i drugim pozostaje niezmienny oraz przy założeniu, że raty będą płacone na końcu każdego miesiąca przez cały okres spłaty kredytu.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 620

B. 720

C. 820

D. 920

E. 1 020

5. Rozważmy następujące renty:

Renta 1

99 – letnia renta pewna, natychmiast płatna, o płatnościach dokonywanych na końcu roku zdefiniowana następująco:

$$\begin{cases} r_1 = 5, & \\ r_k = r_{k-1} + 5 \cdot k, & dla\ k = 2,3,........,50 \\ r_{50+s} = r_{50-s}\ , & dla\ s = 1,2,.........,49; \end{cases}$$

gdzie r_k oznacza płatność na końcu roku *k*.

Renta 2

107 – letnia renta pewna, natychmiast płatna, o płatnościach dokonywanych na końcu roku zdefiniowana następująco:

$$\begin{cases} \bar{r}_k = \dfrac{5}{2} \cdot (k^2 + k), & dla\ k = 1,2,........,54 \\ \bar{r}_{54+s} = \bar{r}_{54-s}, & dla\ s = 1,2,........,53; \end{cases}$$

gdzie $\bar{r}_k$ oznacza płatność na końcu roku *k*.

Proszę obliczyć cenę renty drugiej, jeśli wiadomo, że efektywna roczna stopa procentowa wynosi $i = 10\%$ i że cena renty pierwszej wynosi *5 576*.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 5 600

B. 5 650

C. 5 700

D. 5 750

E. 5 800

6. Cena akcji Spółki X wynosi *100*. Za trzy miesiące cena akcji będzie wynosić *120* lub *80*. Oszacowano (na podstawie obserwacji historycznej), że prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji wynosi *80%*, natomiast spadku *20%*. Wolne od ryzyka natężenie oprocentowania wynosi *8%* w stosunku rocznym. Proszę policzyć ile wynosi arbitrażowe prawdopodobieństwo, tzn. prawdopodobieństwo zaobserwowane przez inwestora obojętnego względem ryzyka (*ang. risk-neutral probability*), wzrostu ceny akcji do *120*.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 20%

B. 45%

C. 55%

D. 80%

E. za mało danych aby udzielić odpowiedzi

7. Inwestor kupuje *20 - letnią* obligację o kuponach płatnych na końcu każdego roku i o wartości nominalnej równej wartości wykupu wynoszącej *1 500* za cenę wyznaczoną przy założeniu uzyskania efektywnej rocznej stopy zwrotu równej j. Wiadomo, że stopa kuponowa wynosi *150 %* efektywnej rocznej stopy zwrotu j. Wiadomo również, że jednocześnie z zakupem obligacji inwestor zdeponował w banku kwotę *3 000* na okres *5* lat. Po okresie *5 lat* inwestor sprzedaje obligację za cenę wyznaczoną przy założeniu uzyskania tej samej efektywnej rocznej stopy zwrotu równej j oraz otrzymuje kwotę zdeponowaną w banku wraz z należnymi odsetkami naliczonymi przy nieznanej efektywnej rocznej stopie zwrotu i. Inwestor postanowił przeznaczyć pieniądze uzyskane ze sprzedaży obligacji oraz z rozwiązania lokaty na zakup *5 – letniej* renty pewnej natychmiast płatnej o płatnościach w wysokości *2 000* dokonywanych na końcu każdego roku, o której wiadomo, że została skalkulowana przy efektywnej rocznej stopie zwrotu $i' = 8\%$. Wyznacz v_i^5, jeśli wiadomo, że $v_j^5 = 0.75$, gdzie v_i oraz v_j oznaczają odpowiednio czynniki dyskontujące odpowiadające efektywnym rocznym stopom zwrotu i oraz j.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 0.45

B. 0.50

C. 0.55

D. 0.60

E. 0.65

8. Wiedząc, że

(i) $\delta_t = \dfrac{2t^5 + 8(t^3 + t)}{t^6 + 6t^4 + 12t^2 + 8}$, $\quad$ *dla* $0 \le t \le 1$,

(ii) i jest roczną efektywną stopą oprocentowania równoważną intensywności oprocentowania δ_t,

(iii) w chwili $t = 0$ kwota 1 zostaje zdeponowana w funduszu A oraz funduszu B,

(iv) w funduszu A kapitał akumulowany jest z oprocentowaniem prostym przy stopie i,

(v) w funduszu B kapitał akumuluje się z intensywnością oprocentowania δ_t,

(vi) w obu przypadkach mamy do czynienia z modelami ciągłymi.

Proszę policzyć czas T, w którym różnica kwoty zgromadzonej w funduszu A i kwoty zgromadzonej w funduszu B osiągnie maksimum.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1/8

B. 1/6

C. 1/3

D. 1/2

E. 3/4

9. Inwestor chce dokonać trzech wpłat do banku: *1* na początku pierwszego roku, *2* na początku drugiego roku oraz *4* na początku trzeciego roku, jednocześnie planując wypłacenie całej lokaty (zainwestowany kapitał wraz z odsetkami) po *10-ciu* latach. Gdyby inwestor wybrał Bank A, oferujący efektywną roczną stopę zwrotu i, po *10-ciu* latach mógłby wypłacić *8*, gdyby zaś wybrał Bank B, oferujący efektywną roczną stopę zwrotu j, po *10-ciu* latach mógłby wypłacić *10*. Ile będzie mógł wypłacić, gdy wybierze Bank C, oferujący efektywną roczną stopę zwrotu $i + j$?

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 12.40

B. 12.05

C. 11.70

D. 11.35

E. 11.00

10. Proszę znaleźć bieżącą cenę akcji wiedząc, że ceny 3-miesięcznych europejskich opcji na tę akcję, z ceną wykonania *95*, wynoszą *5.20* (opcja kupna) oraz *2.20* (opcja sprzedaży), natomiast 9-miesięczne europejskie opcje na tą akcję, z ceną wykonania *100*, kosztują *6.20* (opcja kupna) oraz *4.70* (opcja sprzedaży).

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 97.03

B. 96.34

C. 95.43

D. 94.13

E. 93.83

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2002 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	E	
3	E	
4	D	
5	C	
6	C	
7	B	
8	D	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.