1. Inwestor inwestuje kapitał w wysokości 1 000 zł na okres jednego roku przy natężeniu oprocentowania (*force of interest*) $\delta_t = e^{-t^2}$. Ile wynosi wartość kapitału wraz z należnymi odsetkami w zaokrągleniu do pełnych 50 zł na koniec okresu inwestycji.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1 900 zł

B. 1 950 zł

C. 2 000 zł

D. 2 050 zł

E. 2 100 zł

2. Inwestor zakupił trzy maszyny o wartości 100 każda. Każda z nich amortyzowana jest przy pomocy innej metody przez okres 20 lat, i tak:

- maszyna I amortyzowana jest przy pomocy metody amortyzacji liniowej (*straight line method*)
- maszyna II amortyzowana jest przy pomocy metody stałej stopy amortyzacji (*compound discount method*)
- maszyna III amortyzowana jest przy pomocy metody liniowo malejących odpisów amortyzacyjnych (*sum of the digit method*)

Po 10 latach każda z nich warta jest 75. Ile warte będą razem maszyny po 20 latach.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 156

B. 161

C. 172

D. 183

E. 192

3. Ile wynosi, na koniec drugiego roku, wartość renty, w której wypłacane jest 1 na początku każdego roku przez okres 10 lat. Oprocentowanie w roku t wynosi $\frac{1}{5+t}$.

Odpowiedź:

A. $\sum_{t=6}^{15} \frac{9}{t}$

B. $\sum_{t=6}^{15} \frac{8}{t}$

C. $\sum_{t=5}^{14} \frac{8}{t}$

D. $\sum_{t=5}^{14} \frac{9}{t}$

E. $\sum_{t=5}^{14} \frac{10}{t}$

4. Dana jest renta nieskończona natychmiast płatna, płacąca na końcu każdego roku według następującego schematu:

$$R_n = \begin{cases} 2-|n-2| & dla\ n \in \{1,2,3\} \\ 3-|n-6| & dla\ n \in \{4,5,6,7,8\} \\ 2-|n-10| & dla\ n \in \{9,10,11\} \\ R_{n-11} & dla\ n > 11 \end{cases}$$

Niech d^{mod} oznacza stopę dyskonta odpowiadającą stopie procentowej i^{mod} gwarantującej roczną rentowność inwestycji taką, jak standartowa stopa i (przyjęta do kalkulacji rent i czynnika dyskontującego v w poniższych wzorach) w ciągu 11 lat. Proszę wskazać wzór na wartość obecną renty płacącej R_n na końcu roku n.

Odpowiedź:

A. $\ddot{a}_{\overline{5}|} \cdot a_{\overline{6}|} \cdot \frac{1}{d^{\text{mod}}}$

B. $(2 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|} \cdot a_{\overline{2}|} + v^4 \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|} \cdot a_{\overline{4}|}) \cdot \frac{1}{d^{\text{mod}}}$

C. $(a_{\overline{5}|} + v^6 + v^7 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|} \cdot a_{\overline{4}|}) \cdot \frac{1}{d^{\text{mod}}}$

D. $((Ia)_{\overline{6}|} + v^6 \cdot (Da)_{\overline{5}|}) \cdot \frac{1}{d^{\text{mod}}}$

E. $(\ddot{a}_{\overline{2}|} \cdot a_{\overline{2}|} + v^3 \cdot \ddot{a}_{\overline{3}|} \cdot a_{\overline{3}|} + v^8 \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|} \cdot a_{\overline{2}|}) \cdot \frac{1}{d^{\text{mod}}}$

5. Inwestorowi zaoferowano możliwość zakupu jednej z dwóch rent pewnych natychmiast płatnych, o których wiadomo, że ich wartość obecna jest równa i wynosi *K*. Schematy płatności dla tych rent są następujące:

(i) 99 letnia, o wypłacie R_n na końcu roku *n* zadana formułą:

$$\begin{cases} R_{50} = 50 \cdot \alpha \\ R_{50-k} = R_{50+k} = (50-k)\cdot\alpha; \qquad k \in \{1, 2, \ldots\ldots, 49\} \end{cases}$$

(ii) 100 letnia, o wypłacie R_n na końcu roku *n* zadana formułą:

$$\begin{cases} R_{50} = R_{51} = 50 \cdot \beta \\ R_{50-k} = R_{51+k} = (50-k)\cdot\beta; \qquad k \in \{1, 2, \ldots\ldots, 49\} \end{cases}$$

Oblicz wartość ilorazu $\frac{\alpha}{\beta}$ przyjmując do kalkulacji stopę procentową *i* = 7%.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 1.0015

B. 1.0025

C. 1.0035

D. 1.0045

E. 1.0055

6. Inwestor postanowił zainwestować kapitał *P* na dwa lata. Przedstawiono mu dwie oferty:

(i) w ofercie I zagwarantowano efektywną roczną stopę zwrotu 15% w każdym roku trwania inwestycji.

(ii) w ofercie II zagwarantowano, że natężenie oprocentowania *(force of interest)* δ_t będzie dane wzorem $\delta_t = 0{,}1 \cdot t$ w ciągu całego okresu trwania inwestycji.

Inwestor zdecydował, że αP zainwestuje korzystając z oferty I oraz $(1-\alpha)P$ korzystając z oferty II. Po dwóch latach inwestor posiadał kwotę (kapitał *P* oraz odsetki) 200 000 zł. Wiadomo, że gdyby inwestor zainwestował $2\alpha P$ korzystając z oferty (1) oraz $(1-2\alpha)P$ korzystając z oferty II, to po dwóch latach posiadałby kwotę 205 000 zł.

Oblicz wysokość kapitału *P*.

Odpowiedź (podaj najbliższą odpowiedź):

A. 150 000 zł

B. 155 000 zł

C. 160 000 zł

D. 165 000 zł

E. 170 000 zł

7. Które z poniższych tożsamości są prawdziwe.

(i) $\left(\bar{a}_{\overline{n|}} - \frac{d}{\delta}\right) \cdot (1+i) = \bar{a}_{\overline{n-1|}}$

(ii) $\frac{d}{dd}(i) = v^2$

(iii) $(Da)_{\overline{n|}} + (Ia)_{\overline{n+1|}} = (n+1) \cdot \left(a_{\overline{n|}} + v^{n+1}\right)$

(iv) $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i^{(m)}}{i}\right) \cdot a_{\overline{n|}}$

Odpowiedź :

A. tylko (i)

B. tylko (i), (ii)

C. tylko (i), (iii)

D. tylko (iii), (iv)

E. żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawdziwa

8. Pożyczkobiorca zaciągnął kredyt w wysokości *L*, który ma być spłacony w równych ratach rocznych R_1 , płatnych na końcu każdego roku przez *2n* lat. Wysokość rat R_1 skalkulowano przy stopie procentowej *i*.

Po upływie *n* lat zmieniono stopę procentową z *i* na *j* i w związku z tym przeprowadzono renegocjacje warunków spłaty kredytu. Ustalono, co następuje:

(i) pożyczkobiorca pobierze z banku dodatkowo kwotę *P*

(ii) całe bieżące zadłużenie (niespłacona część kwoty *L* oraz kwota *P*) zostanie spłacone w równych ratach rocznych R_2, płatnych na końcu każdego roku przez *2n* lat licząc od daty renegocjacji warunków spłaty kredytu.

Która z poniższych zależności jest prawdziwa?

Odpowiedź:

A. $$\frac{1}{R_2 \cdot a_{\overline{2n|}\,j} \cdot a_{\overline{2n|}\,i} - L \cdot a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{1}{P \cdot a_{\overline{2n|}\,i}}$$

B. $$\frac{1}{R_1 \cdot a_{\overline{2n|}\,j} \cdot a_{\overline{2n|}\,i} - P \cdot a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{1}{P \cdot a_{\overline{n|}\,i}}$$

C. $$\frac{1}{R_1 \cdot a_{\overline{2n|}\,j} \cdot a_{\overline{2n|}\,i} - P \cdot a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{1}{L \cdot a_{\overline{2n|}\,i}}$$

D. $$\frac{1}{R_2 \cdot a_{\overline{2n|}\,j} \cdot a_{\overline{2n|}\,i} - P \cdot a_{\overline{n|}\,i}} = \frac{1}{P \cdot a_{\overline{n|}\,i}}$$

E. żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawdziwa

9. Dana jest n-letnia ($n > 1$) obligacja, o stopie kuponowej równej i ($i > 0$), wartości nominalnej równej F oraz wartości wykupu C. Płatności odsetkowe dokonywane są na koniec każdego okresu. Dany jest również kredyt o wartości F, spłacany w równych ratach rocznych przez n lat na koniec każdego roku. Stopa kredytowa wynosi i.
Wyznaczono średni czas trwania (*duration*) obligacji i kredytu przy stopie zyskowności (*yield rate*) j ($j > 0$).
Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

(i) średni czas trwania obligacji jest równy średniemu czasowi trwania kredytu, gdy $F=C$

(ii) średni czas trwania obligacji jest mniejszy niż średni czas trwania kredytu, gdy $i < j$

(iii) średni czas trwania obligacji jest mniejszy lub równy niż średni czas trwania kredytu, gdy $i > j$

Odpowiedź:

A. tylko (i)

B. tylko (ii)

C. tylko (iii)

D. tylko (ii) i (iii)

E. żadna z powyższych odpowiedzi A, B, C, D nie jest prawdziwa

10. Inwestor rozważa zakup n-letniej obligacji o nominale 1 000 zł, wykupywanej po nominale. Stopa kuponowa wynosi 6%. Ile powinien zapłacić za obligację inwestor, tak aby rentowność inwestycji wyniosła 5%? Dodatkowo wiadomo, iż identyczna obligacja $2n$-letnia kosztowałaby o 50 zł więcej.

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 900 zł

B. 1 000 zł

C. 1 100 zł

D. 1 200 zł

E. 1 300 zł

Egzamin dla Aktuariuszy z 24 marca 2001 r.

Matematyka finansowa

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi...

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	B	
4	E	
5	B	
6	C	
7	C	
8	A	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.