**1.** W populacji, w której śmiertelnością rządzi prawo de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega = 150$, dzieckiem jest się do wieku $d$. W wieku $d$ rozpoczyna się pracę i pracuje się do wieku $p$.W wieku $p$ przechodzi się na emeryturę i pozostaje na niej aż do śmierci.

Przebywanie w każdym z wymienionych trzech stanów (dziecko, pracownik, emeryt) może przerwać ponadto tylko śmierć. Wiadomo, że noworodek jest dzieckiem przeciętnie przez 48 lat, młody pracownik ( a więc osoba w wieku $d$ ) pracuje przeciętnie 25 lat, wreszcie młody emeryt (osoba w wieku $p$ ) pobiera emeryturę przeciętnie przez 30 lat .

Oblicz $p - d$ .

(A 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31
(E) 32

**2**. Symbole primowane odnoszą się do sytuacji po zmianie profilu śmiertelności w danej populacji. Zmiana ta na poziomie funkcji natężenia wymierania wyraża się wzorem

$$\mu_x' = \mu_x + \Delta\mu$$

dla każdego wieku $x$ , gdzie $\Delta\mu \equiv const > 0$. Symbole nieprimowane odnoszą się do sytuacji przed zmianą.

Wiadomo ponadto, że ubezpieczyciel tak dostosował techniczną intensywność oprocentowania $\delta$ do nowego poziomu $\delta'$, aby $\ddot{a}_x = \ddot{a}_x'$ dla każdego $x$. Wówczas prawdziwy jest związek

(A) $A_x' = \dfrac{e^{\delta} - e^{\Delta\mu}}{e^{\delta+\Delta\mu} - 1} A_x + \dfrac{e^{\Delta\mu} - 1}{e^{\delta+\Delta\mu} - 1}$ ,

(B) $A_x' = \dfrac{e^{\delta+\Delta\mu} - e^{\Delta\mu}}{e^{\delta+\Delta\mu} - 1} A_x + \dfrac{e^{\Delta\mu} - 1}{e^{\delta+\Delta\mu} - 1}$ ,

(C) $A_x' = \dfrac{e^{\delta+\Delta\mu} - e^{\Delta\mu}}{e^{\delta} - 1} A_x + \dfrac{e^{\Delta\mu} - 1}{e^{\delta} - 1}$ ,

(D) $A_x' = \dfrac{e^{\delta} - e^{\Delta\mu}}{e^{\delta-\Delta\mu} - 1} A_x + \dfrac{e^{\Delta\mu} - 1}{e^{\delta-\Delta\mu} - 1}$ ,

(E) $A_x' = \dfrac{e^{\delta} - e^{\Delta\mu}}{e^{\delta} - 1} A_x + \dfrac{e^{\Delta\mu} - 1}{e^{\delta} - 1}$ .

**3.** Osoba (x) rozważa 20-letnie ubezpieczenie ze stałą, roczną składką netto, płatną na początku roku przez cały okres ubezpieczenia. Świadczenie śmiertelne jest wypłacane na koniec roku śmierci. Za roczną składkę netto $P$=7000 zł można kupić jedno z trzech ubezpieczeń:

1. z sumą ubezpieczenia $S_1$ dla dożycia i śmierci, stałą przez cały okres ubezpieczenia;
2. z sumą ubezpieczenia $k \cdot S_2$ w $k$-tym roku ubezpieczenia dla śmierci $(k = 1, \ldots, 20)$, bez świadczenia za dożycie;
3. z sumą ubezpieczenia $S_3$ w ubezpieczeniu na dożycie oraz $S_3$ plus zwrot wpłaconych dotychczas składek $P$ (bez oprocentowania) za śmierć.

Podaj wysokość $S_3$ , jeśli $S_1$ =200 000 zł oraz $S_2$ =47 035 zł. Wskaż najbliższą wartość.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (A) | 162 895 | (B) | 164 730 | (C) | 166 565 |
| (D | 168 400 | (E) | 170 235 | | |

**4**. Osoba $(x)$ zamierza ubezpieczyć się na życie. Będzie płacić aż do śmierci składkę ciągłą ze stałą roczną intensywnością $100\,000\overline{P}_x$. Suma ubezpieczenia 100 000 zł będzie wypłacona od razu po śmierci. Jeśli ubezpieczy się miesiąc później, odpowiednia intensywność składki ciągłej wyniesie $100000\overline{P}_{x+\frac{1}{12}}$ w skali roku. Oblicz przybliżoną wartość $100000\overline{P}_{x+\frac{1}{12}}$, jeśli dane są:

$$\overline{P}_x = 0{,}017 \ , \quad \mu_x = 0{,}006 \quad , \quad \delta = 0{,}05 \ .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 1704 (B) 1706 (C) 1708 (D) 1710
(E) 1712

**5.** Osobnik z populacji z wykładniczym rozkładem czasu życia ma 20-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie, wypłacające świadczenie śmiertelne w momencie śmierci. Składka ma być płacona przez cały okres ubezpieczenia ze stałą intensywnością.
Po 10 latach ubezpieczony zrezygnował z dalszego płacenia składek i poprosił o zamianę ubezpieczenia na bezskładkowe i utrzymanie dotychczasowej sumy ubezpieczenia.
Podaj maksymalne dalsze trwanie tego ubezpieczenia od momentu zmiany warunków, jeśli $\mu = 0{,}02$ oraz $\delta = 0{,}08$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 4,5 (B) 6,5 (C) 14,5 (D) 19,5
(E) 24,5

**6**. Rozważamy bezterminowe ciągłe ubezpieczenie na życie dla ($x$), wybranego z populacji z wykładniczym rozkładem trwania życia $\mu_{x+t} \equiv \mu$. Jeśli ubezpieczony umrze w wieku ($x+t$) to zostanie wypłacona suma ubezpieczenia $c(t) > 0$. Wiadomo ponadto, że intensywność składki netto $\pi(t)$ cały czas maleje .Wówczas dla każdego $t > 0$ spełniona jest nierówność:

(A) $c'(t) \le \dfrac{1}{\mu}[(\delta + \mu)V'(t) - V''(t)]$ ,

(B) $c'(t) \le \dfrac{1}{\mu}[(\delta + \mu)V'(t) - \delta V''(t)]$ ,

(C) $c'(t) \le \dfrac{1}{\mu}[(\delta + \mu)V'(t) - \mu V''(t)]$ ,

(D) $c'(t) \le \dfrac{\delta + \mu}{\mu}[V(t) - V''(t)]$

(E) $c'(t) \le \dfrac{1}{\delta + \mu}[(\delta + \mu)V'(t) - V''(t)]$ .

Uwaga. Zakładamy, że symbol pochodnej zawsze dotyczy sytuacji, w której dana funkcja ma pochodną odpowiedniego rzędu.

**7.** Rozpatrujemy bezterminowe ubezpieczenie na życie wypłacające 1 zł na koniec roku śmierci. Składka jest płacona na początku roku, w stałej wysokości, przez cały okres ubezpieczenia.

Ubezpieczyciel poniósł koszty początkowe oraz ponosi na początku każdego roku ubezpieczenia stałą kwotę kosztów administracyjnych. W pierwszym roku bieżące płatności z tytułu obydwu kosztów przekroczyły o 0,045 zł poziom składki brutto. Wiadomo, że na moment wystawienia polisy strumień kosztów administracyjnych jest równoważny kosztowi początkowemu.

Wyznacz udział narzutu na koszty w składce brutto, jeśli dane są:

$i = 5\%$ $\qquad \ddot{a}_x = 10{,}666$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 23% (B) 25% (C) 27% (D) 29%
(E) 31%

**8.** Rozważamy model szkodowości z dwiema szkodami. Dane są:

$$\mu_{1,x+t} \equiv 0{,}4 \quad , \qquad \mu_{2,x+t} = t \quad .$$

Niech $t^*$ oznacza moment w którym najczęściej zdarza się pierwsza szkoda (nieważne która). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że do chwili $t^*$ nie zajdzie żadna szkoda.

(A) 0,54 (B) 0,60 (C) 0,66 (D) 0,72
(E) 0,78

**9**. Trwa ubezpieczenie rentowe dla pary osób, wypłacające na początku roku kwotę $R_2$, jeśli żyją obydwoje, lub $R_1$, jeśli żyje jedno z nich. Na koniec bieżącego roku ubezpieczyciel obliczył rezerwę netto w tym ubezpieczeniu przy założeniu, że żyją obydwoje ubezpieczeni i skończą $x$ oraz $y$ lat.
Uzyskano jednak informację, że jedna osoba już nie żyje i począwszy od najbliższej wypłaty będzie wypłacana renta $R_1$. Ubezpieczyciel nie wie jednak, która osoba nie żyje. Okazało się, że nowej sytuacji odpowiada rezerwa w tej samej wysokości, co wcześniej policzona.
Oblicz wysokość wypłaty $R_1$ . Dane są:

$$R_2 = 10\,000 \qquad p_{x-1} = 0{,}933 \qquad p_{y-1} = 0{,}978$$

$$\ddot{a}_x = 6{,}6 \qquad \ddot{a}_y = 9{,}46 \qquad \ddot{a}_{xy} = 5{,}6$$

(A) 7800 (B) 8700 (C) 9200 (D) 12100
(E) 14300

**10**. Plan emerytalny składa się z części (1) typu *contribution-defined* oraz z części (2) *benefit-defined*. W pierwszej części płacona jest składka w wysokości 10% wynagrodzenia. Druga część dopełnia łączną emeryturę do 50% płacy finalnej, czyli płacy z ostatniego roku zatrudnienia..
Rozważ 40-letniego uczestnika planu(urodzonego 1 stycznia) z płacą rosnącą o 5% na początku każdego roku i wynoszącą obecnie (po tegorocznej podwyżce) 40 000 zł oraz z kapitałem w planie (1) w wysokości 40 000. Przyjmij, że składka jest płacona raz w roku, w połowie roku. Zakładając przejście na emeryturę w wieku 65 lat, podaj udział emerytury z pierwszej części planu w całej emeryturze. Dane są:

$i = 5\%$ $\qquad \ddot{a}_{65}^{(12)} = 10{,}7$

Wskaż najbliższą wartość.

(A) 65,5% (B) 66,5% (C) 67,5% (D) 68,5%
(E) 69,5%

# XXX Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2003 r.

## Matematyka ubezpieczeń życiowych

## Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ......Klucz odpowiedzi...........

Pesel ...........................................................................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | C | |
| 2 | E | |
| 3 | E | |
| 4 | B | |
| 5 | E | |
| 6 | A | |
| 7 | D | |
| 8 | C | |
| 9 | E | |
| 10 | C | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.