1. Rozważamy dwie niezależne populacje, w których śmiertelnością rządzi prawo Gompertza

$$\mu_x^{(1)} = B \cdot 2^x \quad , \quad \mu_x^{(2)} = 2B \cdot 8^x .$$

Wiemy, że $\Pr(X^{(2)} \le 50) = \dfrac{1}{3}$. Oblicz ${}_{150}p_1^{(1)}$.

Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,10 (B) 0,15 (C) 0,20 (D) 0,25
(E) 0,30

**2.** Osoba ($x$) może kupić za tę samą składkę jednorazową netto SJN= 5 jedną z polis P($m$).
Ubezpieczenie P($m$) wypłaca na koniec roku śmierci świadczenie w wysokości

$$c_{K+1} = \begin{cases} \frac{K+1}{m} h(m) & dla \quad K = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ \\ h(m) & dla \quad K \geq m \end{cases}$$

czyli suma ubezpieczenia rośnie liniowo do kwoty $h(m)$ przez $m$ lat.
Dane są:

$$h(5) = 15 \quad , \quad M_{x+5} = 2500 \quad , \quad D_x = 8500 .$$

Oblicz $h(6)$.

(A) 15,10 (B) 15,20 (C) 15,30 (D) 15,40

(E) 15,50

**3.** Osoba ($x$) zaczyna płacić na początku roku składki w wysokości $P({}_{m|}\ddot{a}_x)$ rocznie. Po dożyciu do wieku ($x+m$) zacznie otrzymywać rentę dożywotnią w wysokości 1 na rok. Dane są

$$P({}_{m|}\ddot{a}_x) = 0{,}25 \qquad {}_kV = 3{,}635 \qquad \ddot{a}_{x+k} = 13{,}21\,.$$

Oblicz $P({}_{m-k|}\ddot{a}_{x+k})$, tzn. wysokość rocznej składki netto, którą ta osoba płaciłaby za to samo świadczenie rentowe, gdyby zdecydowała się na ubezpieczenie w wieku *(x+k)*. Zakładamy tutaj, że $k<m$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,30 (B) 0,45 C) 0,60 (D) 0,75

(E) 0,90

**4.** Która z poniższych zależności rekurencyjnych jest zawsze prawdziwa?

(A) $P_{x+1} = P_x + (P_x - vq_x)(P_x + d)$

(B) $P_{x+1} = P_x + (P_{x+1} - vq_x)(P_x + d)$

(C) $P_{x+1} = P_x + (P_{x+1} - vq_x)(P_{x+1} + d)$

(D) $P_{x+1} = P_x + (P_x - vq_x)(P_{x+1} + d)$

(E) żadna.

**5.** Rozważmy ubezpieczenie ciągłe dla ($x$), w którym wypłacone świadczenie wynosi $c(t)$, jeśli ubezpieczony umrze w wieku ($x+t$). Załóżmy ponadto, że

$$\pi(t) = const = \pi \quad , \qquad \pi^{(s)}(t) = const = s \quad , \quad \pi^{(r)}(t) = const = r \ ,$$

$$\mu_{x+t} > 0 \ , \qquad \delta > 0 \, .$$

Który z poniższych wzorów na $c(t)$ jest prawdziwy?

(A) $c(t) = \dfrac{r}{\mu_{x+t}} + \dfrac{s}{\delta}(e^{\delta t} - 1)$

(B) $c(t) = \dfrac{r}{\mu_{x+t} + \delta} + \dfrac{s}{\delta}(e^{\delta t} - 1)$

(C) $c(t) = \dfrac{r}{\mu_{x+t}} + \dfrac{s}{\mu_{x+t} + \delta}(e^{\delta t} - 1)$

(D) $c(t) = \dfrac{r}{\mu_{x+t} + \delta} + \dfrac{s}{\mu_{x+t} + \delta}(e^{\delta t} - 1)$

(E) żaden.

**6**. 25-letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (40) wypłaca 100 000 w przypadku śmierci lub 200 000 w przypadku dożycia 65 lat. Świadczenie śmiertelne jest płatne na koniec roku śmierci. Składka w wysokości $P = 4630$ jest płatna na początku każdego roku ważności ubezpieczenia.
1 stycznia 2000 r. było 2000 aktywnych polis, które właśnie rozpoczęły 10 rok ubezpieczenia. W ciągu roku umarło 20 osób i zostało 1980 aktywnych polis na koniec 2000 r. Wyznacz zysk techniczny ze śmiertelności, jeśli w 2000 r. osiągnięto przychody z lokat o 1 punkt procentowy wyższe od stopy technicznej $i = 4\%$ . Podaj tę wielkość na 1 polisę aktywną na koniec 2000 r. Dane są:

$$A_{50:\overline{15|}} = 0{,}596065 \qquad p_{49} = 0{,}989084 \qquad {}_{15}p_{50} = 0{,}738299 \ .$$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 49,50 (B) 51 (C) 52,50 (D) 54
(E) 55,50

**7.** W ubezpieczeniu rentowym dla $(x)$ po $m$-letnim okresie płacenia składek wypłacana jest renta dożywotnia w wysokości $R$ zł. Składka oraz renta płacone są raz w roku, na początku roku. Wiadomo, że roczna składka netto za takie ubezpieczenie wypłacające 1000 zł wynosi 265,83 zł.

Ubezpieczyciel ponosi następujące koszty:

- koszty związane z inkasem składki w wysokości $\beta\%$ składki brutto,
- koszty administracyjne w wysokości 80 zł rocznie, ponoszone w okresie płacenia składek, na początku roku,
- koszty administracyjne w wysokości $\gamma\%$ renty $R$, ponoszone przy wypłacie każdej renty.

Wiadomo, że roczna składka brutto za rentę $R$=4000 zł wynosi 1416 zł. Wiadomo również, że każda zmiana sumy ubezpieczenia $R$ o 1000 zł zmienia roczną składkę brutto o 330.74 zł.

Podaj wysokość narzutu $\gamma$. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 6% (B) 6,5% (C) 7% (D) 7,5%

(E) 8%

**8.** Ubezpieczyciel kalkuluje składki netto dla ($x$) przyjmując dla standardowej śmiertelności:

| | ...... | $i$=10% | $i$=11% | $i$=12% | ....... |
|---|---|---|---|---|---|
| $100000 \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{25}\vert}$ | ...... | 8 520 | 7 710 | 7 010 | ...... |
| $100000 \cdot \bar{A}_{x:\overline{25}\vert}$ | ...... | 14 882 | 12 784 | 11 065 | ..... |

Osoba w wieku ($x$), uprawiająca niebezpieczny sport, zawarła 25-letnie ubezpieczenie na życie wypłacające w momencie śmierci 200 000, jeśli śmierć nastąpiła w związku z uprawianym sportem oraz 100 000, przy śmierci z innych przyczyn. Wiadomo, że uprawiany sport zwiększa standardową śmiertelność w taki sposób, że natężenie śmiertelności rośnie, niezależnie od wieku, o $\gamma = 0{,}0180185$ . Wyznacz jednorazową składkę netto w tym ubezpieczeniu dla $i$=10% . Podaj najbliższą wartość

(A) 35 290 (B) 36 340 (C) 37 420 (D) 38 580
(E) 39 640

**9**. Na życie kobiety ($x$) oraz mężczyzny ($y$) wystawiono ubezpieczenie wypłacające 100 000 na koniec roku śmierci ostatniego przeżywającego. Składka netto jest płacona rocznie, w stałej wysokości $P = 2478{,}40$ aż do śmierci obydwojga ubezpieczonych.

Wyznacz rezerwę netto na koniec piątego roku ubezpieczenia, jeśli ubezpieczyciel wie, że żyje już tylko jedna osoba, lecz nie wie która. Dane są:

$\ddot{a}_{\overline{xy}} = 13{,}37182$ $\quad \ddot{a}_{x+5} = 10{,}94654$ $\quad \ddot{a}_{y+5} = 7{,}83523$

${}_5p_x = 0{,}94603$ $\quad {}_5p_y = 0{,}81567$ .

Podaj najbliższą wartość.

(A) 12 660 (B) 14 270 (C) 18 420 (D) 22 790
(E) 28 910

**10**. Wszyscy uczestnicy planu emerytalnego przystępują do planu w wieku 25 lat i przechodzą na emeryturę – jeśli utrzymają status aktywny – w wieku 65 lat. Wyjście z planu przed wiekiem emerytalnym daje odchodzącemu pełną wypłatę jego rezerwy emerytalnej.

Pracodawca wpłacił do planu kwotę 800 zł równą rocznemu kosztowi normalnemu 40-letniego uczestnika (za okres od teraz do 41 urodzin).

Podaj kwotę, którą zgromadzi w planie ta osoba gdy osiągnie wiek emerytalny 65 lat (według wartości na moment wypłaty pierwszej emerytury), jeśli funkcja kumulacji uprawnień emerytalnych (*pension accrual function*) ma gęstość

$$m(x) = \frac{v^x(80 - x)}{204{,}43078}$$

oraz $\delta = 0{,}05$ . Podaj najbliższą wartość.

(A) 106 780 (B) 111 455 (C) 114 650

(D) 118 275 (E) 121 115

# XX Egzamin dla Aktuariuszy z 13 października 2001 r.

## Matematyka ubezpieczeń życiowych

## Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ..........Klucz odpowiedzi.............................

Pesel ...........................................................................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | E | |
| 2 | C | |
| 3 | D | |
| 4 | B | |
| 5 | A | |
| 6 | A | |
| 7 | C | |
| 8 | A | |
| 9 | D | |
| 10 | A | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.