1. W populacji osób urodzonych 1 stycznia, dla pewnego całkowitego wieku x, prawdopodobieństwo $q_x = 0.6$.

   Podaj, którego dnia roku (rok ma 365 dni) nastąpi zrównanie:

   prawdopodobieństwa śmierci ${}_u q_x$, $u \in [0, 1)$, wyznaczonego przy hipotezie Balducciego,

   z prawdopodobieństwem przeżycia ${}_u p_x$, wyznaczonym przy jednostajnym rozkładzie zgonów w x-tym roczniku.

(A)	272	(B)	277	(C)	282	(D)	287
(E)	292						

2. Dane są: $(DA)^{1}_{x:\overline{5}|} = 0.3422$ $A^{1}_{x:\overline{5}|} = 0.1137$

$v = 0.95$ $q_x = 0.02574$ $q_{x+5} = .03685$ ${}_5p_x = 0.85842$

Oblicz (podaj najbliższą wartość) $(DA)^{1}_{x+1:\overline{5}|}$

(A) 0.3590 (B) 0.3670 (C) 0.3750 (D) 0.3830

(E) 0.3910

3. Rozważmy dwa produkty rentowe dla (30), w których płatności składek i

świadczeń przypadają na początek roku:

I. przez najbliższe 25 lat ubezpieczony opłaca coroczne składki w wysokości P; po dożyciu wieku 55 zaczyna otrzymywać coroczną rentę dożywotnią w wysokości 1.

II. przez najbliższe 25 lat opłaca coroczne składki w tej samej wysokości P; w przypadku śmierci w ciągu najbliższych 25 lat uposażeni otrzymują zwrot wpłaconych składek bez odsetek (na koniec roku śmierci); natomiast w przypadku dożycia wieku 55 zaczyna otrzymywać coroczną rentę dożywotnią w wysokości b.

Oblicz b (podaj najbliższą wartość).

Dane są:

M_{55}=2389, N_{30}=383395, N_{55}=66319, R_{30}=118994, R_{55}=35783 .

(A) 0.926 (B) 0.936 (C) 0.946 (D) 0.956
(E) 0.966.

4. Osobie w wieku x lat (x całkowite, x<65) oferowane jest ubezpieczenie wymagające wnoszenia na początku każdego roku ubezpieczenia, aż do osiągnięcia 65 lat lub do śmierci, składki w wysokości 1000 zł rocznie.

Ubezpieczenie zapewnia:

- w przypadku dożycia do 65 lat wypłatę kwoty K_x
- w przypadku śmierci przed 65 rokiem życia zwrot (na koniec roku śmierci) wpłaconych składek z oprocentowaniem rocznym równym połowie technicznej stopy procentowej i.

Wyznacz K_{45} (podaj najbliższą wartość) dla technicznej stopy i=12% .

Dane są:

Stopa %	D_{45}	D_{65}	M_{45}	M_{65}	N_{45}	N_{65}
12%	5 576.88	409.02	605.80	125.95	46 396.84	2 641.92
6%	66 441.40	14 656.48	17 247.57	7 402.16	869 090.91	128 159.72
5.66%	76 763.56	18 055.94	21 200.70	9 424.42	1 037 172.96	161 121.67

(A) 64 600 (B) 66 250 (C) 75 200 (D) 90 750
(E) 92 000

5. Niech $\overline{P}(\overline{A}_x)$ oznacza stałą intensywność składki rocznej za dożywotnie ubezpieczenie dla (x) wypłacające 1 w momencie śmierci. Natomiast symbol $\overline{P}((I\overline{A})_x)$ niech oznacza stałą intensywność rocznej składki za dożywotnie ubezpieczenie rosnące dla (x), które wypłaca t , jeśli (x) umrze w wieku x+t (w obu przypadkach składki są płacone aż do śmierci). Wówczas $\overline{P}((I\overline{A})_x)$ jako funkcja x spełnia równanie:

(A) $\frac{d}{dx}\overline{P}((I\overline{A})_x) = \overline{P}((I\overline{A})_x)(\delta + \overline{P}((I\overline{A})_x)) - \overline{P}((I\overline{A})_x)$,

(B) $\frac{d}{dx}\overline{P}((I\overline{A})_x) = \overline{P}((I\overline{A})_x)(\delta + \overline{P}(\overline{A}_x)) - \overline{P}(\overline{A}_x)$,

(C) $\frac{d}{dx}\overline{P}((I\overline{A})_x) = \overline{P}((I\overline{A})_x)(\delta + \overline{P}(\overline{A}_x)) - \overline{P}((I\overline{A})_x)$,

(D) $\frac{d}{dx}\overline{P}((I\overline{A})_x) = \overline{P}((I\overline{A})_x)(\delta + \overline{P}((I\overline{A})_x)) - \overline{P}(\overline{A}_x)$,

(E) żadne z tych równań nie jest uniwersalnie prawdziwe

6. Rozważamy ubezpieczenie 20-letnie na życie i dożycie wystawione (40), opłacane za pomocą kwartalnych składek, nie dłużej niż 10 lat. Suma ubezpieczenia wynosi 200 000 zł. Świadczenie śmiertelne jest płatne na koniec roku śmierci.

Oblicz rezerwę składek netto po 5 latach.

Dane są:

$D_{45}=990.3$ $D_{60}=31.6$ $M_{40}=1057.9$ $M_{45}=700.7$ $M_{50}=364.4$

$M_{60}=26.2$ $N_{40}=13005.3$ $N_{45}=6050.5$ $N_{50}=2214.4$ $i=5\%$.

Należy skorzystać z założenia o jednostajnym rozkładzie śmierci w okresach ułamkowych (*UDD*) oraz przyjąć $\alpha(4)=1,\ \beta(4)=3/8$. Wybierz wartość najbliższą.

(A) 65 560 zł, (B) 66 260 zł, (C) 66 960 zł,
(D) 67 660 zł, (E) 68 360 zł.

7. Rozważmy ubezpieczenie 5-letnie na życie i dożycie wystawione (x) z wypłatą 1 w chwili śmierci , gdy umrze w ciągu najbliższych 5 lat lub w wieku x+5 w przypadku dożycia tego wieku. Składki netto płacone są w formie renty ciągłej 5-letniej ze stałą intensywnością. Wiadomo, że $\delta = 0.2$ oraz rezerwa składek netto po t latach wyraża się wzorem $V(t) = \dfrac{e^t - 1}{e^5 - 1}$, dla $0 \le t \le 5$. Oblicz p_x.

(A) 0.45 (B) 0.55 (C) 0.65 (D) 0.75
(E) 0.85

8. W n-letnim ubezpieczeniu na życie (x) roczna składka płacona jest w stałej wysokości przez cały okres ubezpieczenia, na początku roku. Świadczenie śmiertelne jest wypłacane na koniec roku śmierci.

Wiadomo, że składka netto $P^{1}_{x:\overline{n}|}$ jest o 5% niższa od składki $P^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}$.

20% składki brutto jest przeznaczane na pokrycie bieżących kosztów administracyjnych. Składka brutto jest również obciążona stałą spłatą kosztów akwizycji, poniesionych w momencie wystawienia polisy. Wiadomo, że po pierwszym roku ubezpieczenia wartość bezwzględna rezerwy na koszty akwizycji wynosi ¾ rezerwy składek netto.

Podaj, jaką część składki brutto stanowi składka netto. Wskaż najbliższą wartość.

(A) 76.2% (B) 76.4% (C) 76.6% (D) 76.8%

(E) 77.0%

9. Rozważmy następujące polisy emerytalne:

- wypłaty emerytury $E1$ dla męża (65) są dokonywane w formie renty ciągłej, o stałej intensywności, do końca życia, nie krócej jednak niż 10 lat,
- wypłaty emerytury $E2$ dla męża (65) są dokonywane w formie renty ciągłej, o stałej intensywności, do końca życia, przy czym jeśli umrze w ciągu najbliższych 10 lat, to jego żona (60) zacznie otrzymywać rentę wdowią z dotychczasową intensywnością, nie dłużej jednak niż do swoich 70. urodzin.

Obliczyć o ile procent intensywność emerytury $E2$ jest większa od intensywności emerytury $E1$, przy założeniu, że są aktuarialnie równoważne?
Dane są: $\delta = 0.05$, $\mu_{60+t}^{(k)} = 0.04$, $\mu_{65+t}^{(m)} = 0.06$ dla $t>0$.

(A) 2.2% (B) 2.7% (C) 3.2% (D) 3.7%
(E) 4.2%

10. Plan emerytalny jest finansowany metodą *entry-age actuarial cost* . Składkę płaconą za uczestnika w przedziale wieku $(x,\ x+dx)$ opisuje $(aA)(x)\cdot m(x)\cdot dx$ gdzie:

$(aA)(x)$ jest wartością przyszłych emerytur na moment x lat,

$m(x)$ jest gęstością nabywania uprawnień do emerytury (*pension accrual density function*).

Składka danego uczestnika jest płacona w sposób ciągły ze stałą roczną intensywnością przez cały aktywny okres uczestnictwa $(b \le x < r)$. Podaj właściwą dla tej metody finansowania postać funkcji $m(x)$.

(A) $\dfrac{1}{r-b}$

(B) $\dfrac{1}{\bar{a}_{b:\overline{r-b}|}}$

(C) $\dfrac{1}{\bar{a}_{b:\overline{x-b}|}}$

(D) $\dfrac{e^{-\delta x}s(x)}{\bar{a}_{b:\overline{r-b}|}}$

(E) $\dfrac{e^{-\delta x}s(x)}{\int_b^r e^{-\delta y}s(y)dy}$

XXI Egzamin dla Aktuariuszy z 24 marca 2001 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....Klucz odpowiedzi...............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	C	
7	A	
8	E	
9	D	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.