1. Oblicz prawdopodobieństwo, że noworodek wzięty z populacji Weibulla:

$$\mu_x = k \cdot x^n \ , \qquad k > 0\,, \quad n > 0$$

dożyje wieku największej śmiertelności (czyli wieku, dla którego $l_x \cdot \mu_x$ osiąga maksimum).

(A) $\exp(-n)$ (B) $\exp\left(-\frac{kn}{n+1}\right)$ (C) $\exp\left(-\frac{n}{n+1}\right)$

(D) $\exp(-kn)$ (E) $\exp\left(-\frac{k}{n+1}\right)$

2. Bezterminowe ubezpieczenie na życie *(x)* wypłaca na koniec roku śmierci świadczenie w wysokości $k+1$, jeśli śmierć nastąpiła w $k+1$ roku ubezpieczenia. Niech Z oznacza wartość świadczenia na moment wystawienia polisy. Intensywność wymierania w tej populacji nie zależy od wieku i wynosi $\mu = 0.02$. Intensywność oprocentowania równa się $\delta = 0.04$.

Oblicz $\sqrt{Var(Z)}$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 3.0 (B) 3.3 (C) 3.6 (D) 3.9
(E) 4.2

3. Osoba w wieku (60) kupuje za jednorazową składkę netto rentę o następującym wzorcu płatności:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ ...,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ ,$$

gdzie pierwsza renta jest płacona natychmiast, a następne w kolejne rocznice polisy. Śmierć nie przerywa wypłaty rent, a ustala jedynie liczbę środkowych "piątek": liczba ta wynosi $\max(K(60)-3,1)$. Tak więc gdy (60) umrze przed 65 rokiem życia to dostanie 1 "piątkę" , czyli 9-letnią rentę o płatnościach

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ ,$$

a gdy np. umrze między 67 a 68 rokiem życia, to zrealizuje płatności

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ .$$

Dane są: $\ddot{a}_{65} = 9.90$ $A_{60:\overline{5|}}^{\ \ 1} = 0.70$ $\ddot{a}_{\overline{5|}} = 4.63$

Oblicz jednorazową składkę netto.

(A) 51.5 (B) 52.0 (C) 52.5 (D) 53.0
(E) 53.5

4. W danej populacji zgony mają jednostajny rozkład w ciągu każdego roku życia.

Dane są: $i = 10\%$ $\bar{A}_x = 0.1921$. Wyznacz $\ddot{a}_x^{(12)}$.
Wskaż najbliższą wartość. Nie stosuj grubych przybliżeń.

(A) 8.50 (B) 8.52 (C) 8.54 (D) 8.56
(E) 8.58

5. Składka $\overline{P}_x$ spełnia następujące równanie różniczkowe:

(A) $\frac{d}{dx}\overline{P}_x = \overline{P}_x^2 - (\mu_x + \delta) \cdot \overline{P}_x + \mu_x \cdot \delta$,

(B) $\frac{d}{dx}\overline{P}_x = \overline{P}_x^2 - (\mu_x - \delta) \cdot \overline{P}_x - \mu_x \cdot \delta$,

(C) $\frac{d}{dx}\overline{P}_x = \overline{P}_x^2 + (\delta - 1) \cdot \mu_x \cdot \overline{P}_x - \delta \cdot \mu_x^2$,

(D) $\frac{d}{dx}\overline{P}_x = \overline{P}_x^2 - (\delta + 1) \cdot \mu_x \cdot \overline{P}_x + \delta \cdot \mu_x^2$,

(E) $\frac{d}{dx}\overline{P}_x = \overline{P}_x^2 - (\mu_x + \delta^2) \cdot \overline{P}_x + \mu_x \cdot \delta^2$

6. W bezterminowym ubezpieczeniu na życie (x) roczna składka jest płacona na początku roku przez cały okres ubezpieczenia, a świadczenia pośmiertne jest płatne na koniec roku śmierci.

W (k+1) roku ubezpieczyciel osiągnął zysk techniczny dzięki stopie oprocentowania lokat przewyższającej stopę techniczną. Zysk techniczny z oszczędności, G_{k+1}^{s} , powstający dzięki lokatom rezerwy netto oraz składki na oszczędności, przeznaczono w całości na wzrost sumy ubezpieczenia. W rezultacie od przyszłego roku suma ubezpieczenia oraz składka wzrosną o 15%.

Podaj nadwyżkę stopy przychodów z lokat ponad stopę techniczną, jeśli wiadomo, że na złotówkę sumy ubezpieczenia składka na oszczędności $\pi_k^s = 0.00144$ oraz dane są $\ddot{a}_x = 10.4032$, $\ddot{a}_{x+k} = 9.8570$, $\ddot{a}_{x+k+1} = 9.7859$.

Podaj najbliższą wartość w punktach procentowych.

(A) 14.5 (B) 15.0 (C) 15.5 (D) 16.0
(E) 16.5

7. Rozpatrujemy ubezpieczenie na życie i dożycie do wieku 65 lat z sumą ubezpieczenia 10 000 zł. W ubezpieczeniu tym świadczenie pośmiertne jest płatne na koniec roku śmierci, a roczne składki są płacone w stałej wysokości na początku roku przez cały okres ubezpieczenia.

Dla osoby w wieku 45 lat roczna składka netto w takim ubezpieczeniu wynosi 350 zł, a dla osoby 46 letniej 380 zł.

Składka brutto jest obciążona, między innymi, spłatą jednorazowych kosztów poniesionych w momencie wystawienia polisy. Ile wynosi jednorazowy koszt wystawienia polisy, jeśli wiadomo że:

- w ubezpieczeniu dla osoby 45 letniej rezerwa brutto po pierwszym roku ubezpieczenia wynosi 50 zł,
- $v = 0{,}95$

Podaj najbliższą wartość.

(A) 289 (B) 293 (C) 297 (D) 301
(E) 305

8. Polisa dwuletnia wystawiona na *(x)* wypłaca $\frac{1}{2}$ zł na koniec roku śmierci, jeśli ubezpieczony umrze w ciągu dwóch pierwszych lat lub 1 zł po dwóch latach, jeśli dożyje wieku *(x+2)*. Dwie roczne składki netto, π_0 oraz π_1 , pobierane są w takiej wysokości, by zminimalizować wariancję straty ubezpieczyciela na moment wystawienia polisy.

Dane są: $q_x = 0.01$ $q_{x+1} = 0.012$ $v = 0.96$.

Oblicz $\sqrt{Var(L)}$. Podaj najbliższą wartość. [*Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Hattendorfa, dekomponującego wariancję zmiennej L na poszczególne lata ubezpieczenia*]

(A) 0.05 (B) 0.06 (C) 0.07 (D) 0.08

(E) 0.09

9. Mężczyzna *(x)* zakupił ubezpieczenie płacące 1 zł rocznie, na początku roku, dopóki żyje *(x)* oraz przynajmniej jedna z jego żon: obecna *(y)* lub poprzednia *(z)*.

Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie, jeśli dane są:

$\ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z = 53$ $\quad \ddot{a}_{xyz} = 9$ $\quad \ddot{a}_{xy} = 11$ $\quad \ddot{a}_{xz} = 10$ $\quad \ddot{a}_{yz} = 15$

(A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20

(E) 26

10. W pewnym planie emerytalnym przejście na emeryturę następuje nie później niż w wieku 60 lat ($l_{60}^{(\tau)} = 0$). Wiadomo, że aktywny (płacący składki) uczestnik planu w wieku *(x)* lat, przechodzi przed osiągnięciem 60 lat w stan nieaktywny zgodnie z prawem de Moivre'a z granicznym wiekiem 120 lat.

Wyznacz obecną wartość (na początek roku, przed zapłaceniem składki) przyszłych składek 40 letniego uczestnika planu, jeżeli wiadomo, że:

- składka płacona jest na początku każdego roku w wysokości 8% od 12 wynagrodzeń ze stycznia,
- obecne roczne wynagrodzenie 40 letniego uczestnika planu wynosi 25 000 zł,
- wynagrodzenie zmienia się raz w roku, tuż przed zapłaceniem składki, zgodnie z formułą $S_{40+k} = \frac{1}{1-0.0125k}$,
- pracownicy, przechodzący na emeryturę dokładnie w wieku 60 lat, dostają w ostatnim dniu pracy jednorazową premię równą 12 wynagrodzeniom miesięcznym. Należna składka emerytalna (8% premii) pobierana jest w ostatnim dniu roku,
- $v = 0.96$.

Podaj najbliższą wartość.

(A) 28 770 (B) 28 785 (C) 29 000 (D) 29 015
(E) 29 030

Egzamin dla Aktuariuszy z 27 marca 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ...Klucz odpowiedzi

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	E	
4	B	
5	B	
6	E	
7	D	
8	A	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.