1. Zakładając jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku, wyraź $\overset{o}{e}_{x+u}$ przez $\overset{o}{e}_x$ oraz q_x, gdzie x jest całkowitą liczbą lat, a $u \in (0,1)$.

(A) $\overset{o}{e}_x \cdot (1 - u \cdot q_x)$

(B) $\overset{o}{e}_x - u$

(C) $\dfrac{\overset{o}{e}_x \cdot (1 - u \cdot q_x)}{1 - u \cdot q_x}$

(D) $\dfrac{\overset{o}{e}_x - u - q_x \cdot u^2}{1 - u \cdot q_x}$

(E) $\dfrac{\overset{o}{e}_x - u + q_x \cdot \frac{u^2}{2}}{1 - u \cdot q_x}$

2. Osoba w wieku x lat rozważa kupno jednego z dwóch bezterminowych ubezpieczeń na życie. W obydwu ubezpieczeniach płaci się jednorazową składkę netto. Pierwsze ubezpieczenie daje świadczenie 1 zł na koniec roku śmierci, a drugie ubezpieczenie świadczenie 1 zł na koniec półrocza śmierci. Składka za drugie ubezpieczenie jest o 1.72% wyższa od pierwszej składki. Zakładając jednostajny rozkład zgonów w ciągu roku, wyznacz techniczną (roczną) stopę procentową i, przy której skalkulowano obydwie składki. Podaj najbliższą wartość.

(A) 6% (B) 7% (C) 8% (D) 9%

(E) 10%

3. W pewnej populacji śmiertelnością rządzi prawo Weibulla z intensywnością wymierania

$$\mu_x = \frac{x}{400} \ .$$

Ponadto intensywność oprocentowania $\delta = 0.05$ oraz Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Wyznacz $\bar{a}_{20}$.

(A) $20\sqrt{2\pi} \cdot e^2 \cdot (1-\Phi(2))$

(B) $40\sqrt{2\pi} \cdot e^2 \cdot (1-\Phi(2))$

(C) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi} \cdot e^2 \cdot (1-\Phi(2))$

(D) $\frac{1}{20}\sqrt{2\pi} \cdot e^4 \cdot (1-\Phi(2))$

(E) $\frac{1}{400}\sqrt{2\pi} \cdot e^4 \cdot (1-\Phi(2))$

4. Osoba w wieku *x* lat kupuje *n*-letnie ubezpieczenie na dożycie, wypłacające 1 zł po dożyciu *n* lat. W ubezpieczeniu tym płacona jest w sposób ciągły składka netto z roczną intensywnością $\overline{P}_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = 0.05$. Oblicz *n* (podaj najbliższą całkowitą wartość), jeśli wiadomo, że intensywność wymierania μ nie zależy od wieku oraz $\mu + \delta = 0.1$.

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
(E) 13

5. Osoba w wieku 35 lat kupuje bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem 1 zł płatnym na koniec roku śmierci. Składka płacona jest na początku każdego roku ważności ubezpieczenia. Wiadomo, że składka na pokrycie bieżącego ryzyka śmierci w 16-tym roku ubezpieczenia wynosi $\pi_{15}^{r} = 0.01$. Dane są ponadto prawdopodobieństwa ${}_{15}p_{35} = 0.9$ oraz $q_{50} = 0.01$.
Oblicz odchylenie standardowe technicznej straty ubezpieczyciela w 16 roku ubezpieczenia $SD(\Lambda_{15})$.

(A) 0.054 (B) 0.064 (C) 0.074 (D) 0.084
(E) 0.094

6. Osoba w wieku x lat kupuje 20-letnie ubezpieczenie na życie z malejącym świadczeniem płatnym w momencie śmierci w wysokości 10000(20-t), jeśli śmierć nastąpiła w wieku $x+t$. W ubezpieczeniu tym płacona jest składka netto w sposób ciągły przez ustalony czas t_0 (jeśli ubezpieczony żyje) z odpowiednią stałą intensywnością $\pi(t_0)$. Ubezpieczyciel wybrał maksymalne t_0 o tej własności, że ${}_tV \geq 0$ dla $t \in [0, 20]$.

Oblicz $\pi(t_0)$, jeśli wiadomo, że długość życia ma rozkład wykładniczy z $\mu = 0.02$ oraz $\delta = 0.04$.

(A) 3200 (B) 3400 (C) 3600 (D) 3800

(E) 4000

7. Osoba w wieku 40 lat zawarła bezterminowe ubezpieczenie na życie ze świadczeniem 10000 zł wypłacanym na koniec roku śmierci oraz roczną składką płatną w stałej wysokości na początku roku przez pierwszych 20 lat ubezpieczenia. Obecnie, po 15 latach ubezpieczenia, tuż przed terminem kolejnej składki, ubezpieczony prosi o zamianę polisy na spłaconą. Wyznacz wysokość świadczenia według zasady ekwiwalentności, jeśli ubezpieczonemu przysługuje cała rezerwa składek netto. Dane są:

$D_{40} =$ 13 229	$D_{55} =$ 5 904	$D_{60} =$ 4 384
$M_{40} =$ 2 751	$M_{55} =$ 2 133	$M_{60} =$ 1 867
$N_{40} =$ 220 027	$N_{55} =$ 79 191	$N_{60} =$ 52 845

Podaj najbliższą wartość.

(A) 7880 (B) 7910 (C) 7940 (D) 7970

(E) 8000

8. Dziesięcioletnie ubezpieczenie na życie obejmuje wyłącznie śmierć wywołaną nieszczęśliwym wypadkiem. Świadczenie śmiertelne jest płatne w momencie śmierci i wynosi w chwili zawarcia ubezpieczenia 1000, a później rośnie w sposób ciągły z roczną intensywnością oprocentowania δ . Intensywność zgonów wywołanych nieszczęśliwym wypadkiem opisuje $\mu_{x+t}^{(NW)} = \frac{t}{80}$, a zgonów z pozostałych przyczyn $\mu_{x+t}^{(inne)} = \frac{t}{120}$. Wyznacz jednorazową składkę netto za to ubezpieczenie przy technicznej stopie procentowej δ . Podaj najbliższą wartość.

(A) 390 (B) 400 (C) 410 (D) 420
(E) 430

9. Mając dane:

i. $\quad {}_t p_x = 1 - t^2 \cdot q_x \;, \quad t \in [0, \quad 1]$

ii. $\quad {}_t p_y = 1 - t^3 \cdot q_y \;, \quad t \in [0, \quad 1]$

iii. $\quad q_x = 0.2$

iv. $\quad q_y = 0.4$

v. $\quad T(x)$ oraz $T(y)$ są niezależne,

oblicz prawdopodobieństwo, że osoba (x) umrze w ciągu 9 miesięcy oraz jej śmierć będzie poprzedzona przez śmierć osoby (y). Podaj najbliższą wartość.

(A) 0.001 (B) 0.003 (C) 0.005 (D) 0.007
(E) 0.009

10. W planie emerytalnym dozwolone jest przechodzenie na emeryturę po ukończeniu 60 roku życia, a przed ukończeniem 63 roku. Świadczenie emerytalne jest płatne w sposób ciągły z roczną intensywnością równą 1.5% sumy wynagrodzeń z całego okresu uczestnictwa w planie.

Kohorta osób, które ukończyły właśnie 40 lat liczy 1000 osób. Wszyscy z nich zarabiają obecnie 50 tys. rocznie. Wynagrodzenia zmieniają się raz w roku i podwyżka wynagrodzeń właśnie się odbyła.

Wiadomo, że w każdym roku przed osiągnięciem minimalnego wieku emerytalnego ubywa z planu 23 uczestników rocznie. Później w każdym miesiącu przechodzi na emeryturę lub umiera przed przejściem jednakowa liczba osób. Śmierć pracownika, który osiągnął wiek emerytalny, lecz nie przeszedł na emeryturę, wywołuje takie same skutki finansowe jak przejście na emeryturę.

Pracodawca ma właśnie wpłacić składkę pokrywającą koszt świadczenia uzyskiwanego za staż między 40 a 41 rokiem życia. Podaj najlepsze przybliżenie wysokości składki na jednego uczestnika, jeśli $v = 0.9$ oraz

$$\bar{a}_{60+t}^{(r)} = (1 - 0.1 \cdot t)\, \bar{a}_{60}^{(r)} \quad \text{dla} \quad t \in [0, \ \ 3] \ .$$

(A) $33 \cdot \bar{a}_{60}^{(r)}$ (B) $36 \cdot \bar{a}_{60}^{(r)}$ (C) $39 \cdot \bar{a}_{60}^{(r)}$

(D) $42 \cdot \bar{a}_{60}^{(r)}$ (E) $45 \cdot \bar{a}_{60}^{(r)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 1998 r.

Matematyka ubezpieczeń życiowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....**Klucz odpowiedzi**...............................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	B	
3	A	
4	C	
5	E	
6	E	
7	D	
8	A	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.