

Zadanie 1.

Liczba szkód w każdym z trzech kolejnych lat dla pewnego ubezpieczonego ma rozkład równomierny:

$$\Pr(N = k) = 1/10 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, 9.$$

Liczby szkód w kolejnych latach są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Prawdopodobieństwo, że w ciągu 3 lat ubezpieczony będzie miał w sumie nie więcej niż 7 szkód wynosi:

- (A) 0.084
- (B) 0.100
- (C) 0.120
- (D) 0.150
- (E) 0.165

Zadanie 2.

W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ jest sumą wypłat,
- proces $N(t)$ i pojedyncze wypłaty $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ są niezależne.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u . Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Założmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ , oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 110\% \lambda \mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = E(L) + 1.96\sqrt{\text{var}(L)}$ wynosi:

- (A) 2.5%
- (B) 3.4%
- (C) 4.3%
- (D) 5.2%
- (E) 6.1%

Zadanie 3.

W pewnym ubezpieczeniu działa 4-klasowy system *No Claim Discount*. Składki roczne wynoszą:

- 200 zł w klasie 1
- 155 zł w klasie 2,
- 125 zł w klasie 3,
- 100 zł w klasie 4.

Przejście z klasy do klasy następuje corocznie, przy czym po roku bezszkodowym ubezpieczony z klasy 1 przechodzi do 2, z klasy 2 do 3, z klasy 3 do 4, a jeśli był w klasie 4, to dalej w niej pozostaje. Po roku ze szkodą (lub szkodami) ubezpieczony zawsze przechodzi do klasy 1.

Rozważmy ubezpieczonego, który generuje w kolejnych latach szkody zgodnie z procesem Poissona o częstotliwości $\lambda = (\ln 5 - \ln 4)$ rocznie. Załóżmy, że każdą szkodę zgłasza natychmiast po jej zajściu.

Wartość oczekiwana składki płaconej przez niego w n -tym roku ubezpieczenia dąży przy $n \rightarrow \infty$ do granicy równej:

- (A) 128 zł
- (B) 132 zł
- (C) 136 zł
- (D) 140 zł
- (E) 144 zł

Zadanie 4.

Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma (α, β) , z wartością oczekiwaną równą $\alpha\beta^{-1}$ i wariancją $\alpha\beta^{-2}$.
- R będzie liczbą z przedziału $(0, \beta)$.

Wtedy:

$$\inf_{d>0} E[\exp(R(Y-d)) | Y > d]$$

wynosi:

(A) $\frac{\beta}{\beta-R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{\beta}{\beta-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha \in (0,1)$

(B) jeden dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{\beta}{\beta-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha \in (0,1)$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\frac{\beta}{\beta-R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(E) $\left(\frac{\beta}{\beta-R}\right)^\alpha$ dla dowolnych $\alpha > 0$

Zadanie 5.

Liczba szkód w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu równa jest:

$$N = M_1 + \dots + M_K, \text{ gdzie:}$$

- $K, M_1, M_2, M_3, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś $M_1, M_2, M_3, \dots$ mają identyczny rozkład prawdopodobieństwa
- K oznacza liczbę wypadków, i ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ ,
- M_i jest liczbą szkód z i -tego wypadku, i ma rozkład określony na liczbach naturalnych (bez zera).

O rozkładzie liczby szkód z jednego wypadku wiemy, że:

$$\Pr(M_1 = 1) = p, \Pr(M_1 > 1) = 1 - p.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe iż w danym roku doszło jedynie do jednego wypadku pod warunkiem, iż wystąpiła więcej niż jedna szkoda:

$$\Pr(K = 1 | N > 1)$$

przy założeniach liczbowych: $\lambda = \frac{1}{5}, \quad p = \frac{4}{5}$

wynosi z dobrym przybliżeniem:

- (A) 0.65
- (B) 0.53
- (C) 0.37
- (D) 0.22
- (E) 0.18

Zadanie 6.

Ubezpieczeni są losowo dobrani z populacji, w której:

- łączna wartość szkód dla ubezpieczonego charakteryzującego się wartością λ parametru Λ ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód N równą λ ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych, a jego wartość oczekiwana wynosi μ ,
- parametr Λ ma rozkład Gamma (2,4) o wartości oczekiwanej $1/2$ i wariancji $1/8$.

Ubezpieczyciel sprzedaje członkom tej populacji ubezpieczenie w zamian za składkę płaconą z góry w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot E(\Lambda | N > 0)$,

a na koniec roku tym ubezpieczonym, którzy nie zgłosili żadnej szkody, **wypłaca bonus** w wysokości:

- $120\% \cdot \mu \cdot \{E(\Lambda | N > 0) - E(\Lambda | N = 0)\}$.

Bonus wynosi:

(A) $\frac{7}{18}\mu$

(B) $\frac{5}{18}\mu$

(C) $\frac{5}{20}\mu$

(D) $\frac{3}{10}\mu$

(E) $\frac{1}{3}\mu$

Zadanie 7.

O rozkładzie zmiennej losowej X wiemy, że:

- $\Pr(X \in [0,10]) = 1$
- $E(X) = 2$
- $\Pr(X < 2) \leq \frac{1}{2}$

Przy tych założeniach o rozkładzie wariancja zmiennej X może przyjmować różne wartości. Kres górny zbioru tych wartości równy jest:

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 14
- (E) 16

Zadanie 8.

Szkoda Y może przyjmować wartości ze skończonego zbioru liczb $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ takich, że $\min\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \geq 3$. Łączna wartość szkód w portfelu W równa się:

$$W = \sum_{i=1}^n N_i y_i,$$

gdzie N_i to liczba szkód o wartości y_i .

Założmy, że $N_1, \dots, N_n$ to nawzajem niezależne zmienne losowe o rozkładach Poissona z wartościami oczekiwanymi odpowiednio $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wiemy, że:

- $E(W) = 600$,
- $\text{VAR}(W) = 7700$,
- $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 100$.

Jeżeli do każdej szkody zastosujemy udział własny ubezpieczonego w wysokości $d = 3$, to wariancja łącznej wartości szkód pozostałej na udziale ubezpieczyciela wyniesie:

- (A) 4100
- (B) 4300
- (C) 4500
- (D) 4750
- (E) 5000

Zadanie 9.

Niech:

- N oznacza liczbę roszczeń z jednego wypadku ubezpieczeniowego, zaś:
- $T_1, T_2, \dots, T_N$ oznacza czas, jaki upływa od momentu zajścia wypadku do zgłoszenia roszczenia odpowiednio 1-go, 2-go, ..., N -tego (numeracja roszczeń od 1-go do N -tego jest całkowicie przypadkowa, nie wynika więc z chronologii ich zgłaszania)

Założmy, że:

- zmienne losowe $N, T_1, T_2, T_3, \dots$ są niezależne,
- zmienne losowe $T_1, T_2, T_3, \dots$ mają identyczny rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1 (jednostką pomiaru czasu jest miesiąc)
- zmienna losowa N ma rozkład logarytmiczny dany wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{-\ln(1-c)} \frac{c^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{z parametrem } c \in (0, 1).$$

Niech A oznacza zdarzenie, iż w ciągu pierwszych 2 miesięcy od zajścia wypadku zgłoszono dokładnie jedno roszczenie, a więc iż:

- dokładnie jedna liczba ze zbioru liczb $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, jest mniejsza lub równa 2.

Prawdopodobieństwo tego, że więcej roszczeń z tego wypadku już nie będzie, a więc:

$$\Pr(N = 1 | A)$$

wynosi:

(A) $\frac{c}{-\ln(1 - ce^{-2})}$

(B) $\frac{ce^{-2}}{-\ln(1 - ce^{-2})}$

(C) $1 - ce^{-2}$

(D) $\frac{1}{1 + ce^{-2}}$

(E) $\frac{ce^{-2}}{-\ln(1 - c)}$

Zadanie 10.

Niech θ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą.

Rozważmy parę zmiennych losowych T_θ i D , oznaczających odpowiednio:

- T_θ - moment czasu, w którym zaszła szkoda,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do jej likwidacji.

Jednostką pomiaru czasu jest jeden rok.

Założmy, że T_θ oraz D są niezależne, przy czym:

- T_θ ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, \theta)$
- D ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej jeden.

Sumę $(T_\theta + D)$ interpretujemy jako moment czasu, w którym zlikwidowano szkodę.

Warunkową wartość oczekiwaną $E(D|T_\theta + D > \theta)$ interpretujemy jako oczekiwany odstęp w czasie pomiędzy momentem zajścia a momentem likwidacji szkody, pod warunkiem iż szkoda, do której doszło na odcinku czasu $(0, \theta)$, do końca tego odcinka czasu zachowała status szkody niezlikwidowanej.

Granica:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} E(D|T_\theta + D > \theta)$$

wynosi:

- (A) rok
- (B) 3/2 roku
- (C) 5/3 roku
- (D) dwa lata
- (E) nieskończoność

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 grudnia 2008 r.**Matematyka ubezpieczeń majątkowych****Arkusz odpowiedzi***

Imię i nazwisko : KLUCZ ODPOWIEDZI

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	D	
3	B	
4	A	
5	A	
6	E	
7	B	
8	E	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.