Zadanie 1.

Niech X_1 będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale (0,1), X_2 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_1)$, X_3 zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, X_2)$ i tak dalej. Niech N oznacza zmienną losową o rozkładzie geometrycznym

$$P(N = n) = (1-q)q^{n-1} \quad \text{gdy } n = 1,2,3,\ldots,$$

gdzie $q \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą. Zmienna N jest niezależna od zmiennych $X_1, X_2, X_3, \ldots$.

Obliczyć $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N)$.

(A) $\frac{1-q}{q^2}\left(e^q - 1 - q\right)$

(B) $\frac{1-q}{q}\left(e^q - 1\right)$

(C) $\frac{2(1-q)}{q(2-q)}$

(D) $\frac{1-q}{2-q}$

(E) $(1-q)e^q$

Zadanie 2.

Zmienna losowa (X,Y,Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX=0,\ EY=2,\ EZ=1$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var(X(Y-2Z))$.

(A) $\frac{13}{4}$

(B) $\frac{17}{4}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{9}{4}$

(E) 2

Zadanie 3.

Zmienna losowa X ma rozkład Weibulla o gęstości

$$p_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta x \exp(-\theta x^2) & gdy \ \ x > 0 \\ 0 & gdy \ \ x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Statystyk nie obserwuje zmiennej X, uzyskuje tylko informację, gdy zmienna X przekroczy wartość d, a mianowicie obserwuje zmienną Y równą X, gdy zmienna X jest większa niż d. W wyniku takiej obserwacji uzyskuje prostą próbę losową $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, $k > 2$. Wartość oczekiwana estymatora największej wiarogodności parametru θ uzyskanego na podstawie próby losowej $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ jest równa

(A) θ

(B) $\frac{k}{k-2}\theta$

(C) $\frac{k-2}{k}\theta$

(D) $\frac{k-1}{k}\theta$

(E) $\frac{k}{k-1}\theta$

Zadanie 4.

Załóżmy, że niezależne zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych $EX_1 = 1$, $EX_2 = EX_3 = EX_4 = 2$.
Obliczyć $P(X_1 = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\})$.

(A) $\frac{5}{35}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{10}$

(D) $\frac{16}{35}$

(E) $\frac{1}{30}$

Zadanie 5.

Niech (X,Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & \text{gdy} \quad y>0 \text{ i } x>0 \text{ i } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $V=\dfrac{X^2}{X^2+Y^2}$ i $Z=X^2+Y^2$. Wtedy

(A) zmienne X i Y są niezależne

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v)=2v$ dla $v\in(0,1)$

(C) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v)=1$ dla $v\in(0,1)$

(D) $Cov(Z,V)=\dfrac{1}{6}$

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem $h(z)=1$ dla $z\in(0,1)$

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}$, $m, n > 1$, będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Bezpośrednio dostępne są tylko obserwacje $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ale dodatkowo znamy średnią $\overline{X}_{n+m} = \frac{1}{m+n}\sum_{i=1}^{n+m} X_i$.

Budujemy estymator parametru σ^2 postaci $T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{n+m}\right)^2$. Obciążenie tego estymatora, czyli wielkość $ET - \sigma^2$ jest równa

(A) $\frac{m}{(n-1)(n+m)}\sigma^2$

(B) $\frac{n}{(n-1)(n+m)}\sigma^2$

(C) $\frac{n+m-1}{(n-1)(n+m)}\sigma^2$

(D) $\frac{-1}{n+m}\sigma^2$

(E) $\frac{-1}{n}\sigma^2$

Zadanie 7.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i wariancją $\frac{1}{\theta}$, gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Zakładamy, że parametr θ ma rozkład a priori o gęstości

$$p(\theta) = \begin{cases} \beta^2 \theta \exp(-\beta\theta) & gdy\ \theta > 0 \\ 0 & gdy\ \theta \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta > 0$ jest znane. Wyznaczamy bayesowski przedział ufności dla parametru $\frac{1}{\theta}$ postaci $[a, b]$, taki że

$$\Pi\left(\frac{1}{\theta} < a \mid x\right) = \Pi\left(\frac{1}{\theta} > b \mid x\right) = 0{,}05,$$

gdzie $\Pi(\cdot \mid x)$ oznacza prawdopodobieństwo przy rozkładzie a posteriori, gdy zaobserwowana wartość próbki losowej jest równa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$. Tak otrzymany przedział jest równy

(A) $$\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{26{,}296}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{7{,}962}\right]$$

(B) $$\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{18{,}307}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{3{,}940}\right]$$

(C) $$\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{36{,}614}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{7{,}881}\right]$$

(D) $$\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{22{,}141}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{2{,}291}\right]$$

(E) $$\left[\frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{11{,}071}, \frac{2\beta + \sum_{i=1}^{6} x_i^2}{1{,}146}\right]$$

Zadanie 8.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 4. Obserwujemy zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ przy danych wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$H_0: \beta_0 = 1$ i $\beta_1 = 1$

przy alternatywie

$H_1: \beta_0 = -1$ i $\beta_1 = 2$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0, gdy spełniona jest nierówność

(A) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i - 1)(x_i - 2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}} > 3{,}290$$

(B) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i - 1)x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}} > 1{,}645$$

(C) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}} > 3{,}290$$

(D) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i - 1)(2 - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2)^2}} > 1{,}645$$

(E) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i - 1)x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}} > 3{,}290$$

Zadanie 9.

Zmienne losowe $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ i $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ są niezależne. Każda ze zmiennych losowych Z_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa $P(Z_i = 1) = p = 1 - P(Z_i = 0)$. Każda ze zmiennych losowych (X_i, Y_i) ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $EX_i = EY_i = m$ i $VarX_i = \sigma^2$, $VarY_i = 4\sigma^2$ i współczynnik korelacji $Corr(X_i, Y_i) = \rho$. Niech $\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i X_i$ i $\overline{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i$.

Zbadać zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych

$$\left(\overline{S}_n - \overline{T}_n\right)\sqrt{n} \text{ przy } n \to +\infty$$

(A) $\left(S_n - T_n\right)\sqrt{n} \to N(0, 2p(1-p)\sigma^2(5-2\rho))$

(B) $\left(S_n - T_n\right)\sqrt{n} \to N(0, p\sigma^2(5-2\rho))$

(C) $\left(S_n - T_n\right)\sqrt{n} \to N(0, p^2\sigma^2(5-4\rho))$

(D) $\left(S_n - T_n\right)\sqrt{n} \to N(0, p\sigma^2(5-4\rho))$

(E) $\left(S_n - T_n\right)\sqrt{n}$ nie jest ciągiem zbieżnym do rozkładu normalnego

Zadanie 10.

Wylosowano niezależnie 14 liczb z rozkładu symetrycznego ciągłego i ustawiono je w ciąg według kolejności losowania. Otrzymano 8 liczb dodatnich (każdą z nich oznaczmy symbolem a) i 6 ujemnych (każdą z nich oznaczmy symbolem b). Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano 6 serii, gdzie serią nazywamy ciąg elementów jednego typu, przed i za którym występuje element drugiego typu, na przykład w ciągu : *aaabbbbaabbbbba* jest 5 serii (3 serie elementów typu a i 2 serie elementów typu b).

(A) $\frac{30}{143}$

(B) $\frac{40}{143}$

(C) $\frac{20}{143}$

(D) $\frac{10}{143}$

(E) $\frac{50}{143}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 17 marca 2008 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.............................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	E	
4	C	
5	C	
6	A	
7	B	
8	A	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.