Zadanie 1.
Każde z ryzyk pochodzących z pewnej populacji charakteryzuje się tym, że przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ rozkład wartości szkód z tego ryzyka jest złożonym rozkładem Poissona:

- z liczbą szkód N o wartości oczekiwanej λ
- oraz rozkładem wartości pojedynczej szkody Y takim, że $\mathrm{E}(Y|\Lambda = \lambda) = a + b \cdot \lambda$, gdzie $a \geq 0$ oraz $b > 0$.

Załóżmy, że rozkład parametru ryzyka Λ w tej populacji jest rozkładem Gamma o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)$

Oczywiście można bez trudu wyznaczyć $\mathrm{E}(Y)$ jako $\mathrm{E}\{\mathrm{E}(Y|\Lambda)\}$. Rzecz w tym, że dużo bardziej interesująca jest inna wielkość, a mianowicie:

- $\dfrac{\mathrm{E}(Y_1 + Y_2 + ... + Y_N)}{E(N)}$,

gdzie N oznacza liczbę szkód, zaś $Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ ich łączną wartość z (losowo wybranego z populacji) ryzyka. Wielkość tę możemy interpretować jako wartość oczekiwaną pojedynczej szkody przypadkowo wylosowanej ze zbioru szkód, które obserwujemy dla pewnej dużej grupy ryzyk losowo wybranych z populacji.

$\dfrac{\mathrm{E}(Y_1 + Y_2 + ... + Y_N)}{E(N)}$ wynosi:

(A) $a + b\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}$

(B) $a + b\dfrac{(\alpha+1)^2}{\beta(\beta+1)}$

(C) $a + b\dfrac{\alpha+1}{\beta}$

(D) $a + b\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$

(E) $a + b\dfrac{(\alpha+1)^2}{\beta^2}$

Zadanie 2.

Niech X_i oznacza wartość szkód z i-tegi ryzyka, zaś $W = X_1 + X_2 + ...X_n$ łączną wartość szkód z portfela ryzyk. Rozważa się niekiedy następującą formułę składki $\Pi(W)$ za portfel ryzyk W:

- $\Pi(W) = \mu_W + \sigma_W \left\{ u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \cdot \gamma_W \right\}$,

gdzie u_ε to kwantyl rzędu $(1-\varepsilon)$ standaryzowanego rozkładu normalnego, zaś $\mu_W, \sigma_W^2, \gamma_W$ to odpowiednio wartość oczekiwana, wariancja i współczynnik skośności zmiennej W.

Jeden ze sposobów wyceny indywidualnych ryzyk spójny z wyceną portfela opiera się na formule:

- $\Pi(X_i) = \mu_i + a \cdot \mathrm{E}\{(X_i - \mu_i)(W - \mu_W)\} + b \cdot \mathrm{E}\{(X_i - \mu_i)(W - \mu_W)^2\}$,

gdzie μ_i to wartość oczekiwana zmiennej X_i.

Dobierz stałe (a, b) tej formuły tak aby zapewnić iż suma składek indywidualnych $\Pi(X_i)$ zrówna się ze składką za cały portfel $\Pi(W)$.

Przy założeniach że:

- $u_\varepsilon = 2$, $\sigma_W^2 = 10000$;

stałe (a, b) wynoszą:

(A) $a = 0.0002$, $b = 0.005$

(B) $a = 0.02$, $b = 0.005$

(C) $a = 0.02$, $b = 0.00005$

(D) $a = 0.0002$, $b = 0.0000005$

(E) $a = 0.02$, $b = 0.0000005$

Zadanie 3.
W pewnym portfelu ubezpieczeń występuje tendencja do dłuższego czasu likwidacji dużych szkód niż szkód małych. Oto prosty model tego zjawiska:

Y, D to wartość i czas opóźnienia likwidacji losowo wybranej szkody, przy czym rozkład bezwarunkowy zmiennej D określamy następująco:

- $D = 0$ jeśli szkodę likwiduje się w tym samym kwartale, kiedy do niej doszło,
- $D = 1$ jeśli szkodę likwiduje się w następnym kwartale,
- $D = 2$ jeśli szkodę likwiduje się jeszcze o kwartał później, itd.,

a zależność wartości szkody i opóźnienia wyraża założenie, że:

- $E(Y|D = k) = \mu \cdot (1 + w)^k$.

Rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu ilościowym dany jest więc ciągiem:

- $r_k := \Pr(D = k)$,

zaś rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu wartościowym dany jest ciągiem:

- $rw_k := \dfrac{r_k E(Y|D = k)}{E(Y)}$

Załóżmy, że zachodzi:

- $r_k = \binom{k+2}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$
- oraz: $w = \dfrac{1}{10}$.

Wobec tego $\dfrac{rw_3}{r_3}$ wynosi (w przybliżeniu)

(A) 0.97

(B) 0.98

(C) 0.99

(D) 1.00

(E) 1.01

Zadanie 4.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki z zerową nadwyżką początkową $U(t) = ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości n pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3,\ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy tylko tyle, że:

- $\Pr(Y_1 \in [0,1]) = 1$
- $E(Y_1) = 1/4$

Wobec tego wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) może przyjmować różne wartości. Przedział, który zawiera wszystkie te wartości (i nic ponadto) jest postaci:

(A) $\left[\frac{1}{8}, \ \frac{1}{4}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{12}, \ \frac{1}{4}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{12}, \ \frac{1}{3}\right]$

(E) $\left[\frac{1}{8}, \ \frac{1}{2}\right]$

Zadanie 5.

Zmienna losowa:

$X = Y_1 + ... + Y_N$

ma złożony rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda = 1$. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika *Y*. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,...,4$ prawdopodobieństwa $\Pr(X = k)$.

k	$\Pr(Y = k)$	$\Pr(X = k)$
0	0	0.3679
1	0.2	0.0736
2	0.3	0.1177
3	0.2	0.0961
4	0.1	0.0703
5	0.2	

Wobec tego $\Pr(X = 5)$ z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 0.1068

(B) 0.1079

(C) 0.1090

(D) 0.1101

(E) 0.1112

Zadanie 6.

W pewnym ubezpieczeniu liczby szkód $N_1, N_2, N_3, \ldots$ które w kolejnych latach generuje ubezpieczony charakteryzujący się wartością q parametru ryzyka Q to niezależne zmienne losowe o identycznym rozkładzie dwumianowym z prawdopodobieństwem zajścia szkody w pojedynczym roku równym q.

Rozkład wartości parametru ryzyka Q w populacji ubezpieczonych dany jest na przedziale $(0,1)$ gęstością:

- $f_Q(q) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} q^{\alpha-1}(1-q)^{\beta-1}$,

z pewnymi nieznanymi dodatnimi parametrami (α, β).

Wiemy, że:

- prawdopodobieństwo p_0 iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu jednego roku nie będzie miał szkody wynosi $\dfrac{7}{10}$
- prawdopodobieństwo $p_{0,0}$ iż losowo wybrany ubezpieczony w ciągu dwóch kolejnych lat nie będzie miał szkody wynosi $\dfrac{1}{2}$.

Wobec tego wartości parametrów (α, β) wynoszą:

(A) $(\alpha, \beta) = (3, 7)$

(B) $(\alpha, \beta) = (6, 14)$

(C) $(\alpha, \beta) = (9, 21)$

(D) $(\alpha, \beta) = (12, 28)$

(E) $(\alpha, \beta) = (15, 35)$

Zadanie 7.

Dla dowolnej zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 < \infty$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (*typu Czebyszewa*):

$$\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma) < \frac{1}{t^{2k}} \cdot \frac{\mu_{2k}}{\sigma^{2k}}. \qquad k = 1,2,..., \qquad t > 0.$$

Jeśli $\mu_4 < \infty$, wtedy istnieje taka liczba t^*, że:

- dla $t < t^*$ ściślejsze ograniczenie na prawdopodobieństwo $\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma)$ otrzymujemy przyjmując $k = 1$,
- zaś dla $t > t^*$ ściślejsze ograniczenie otrzymujemy przyjmując $k = 2$.

Wiemy, że zmienna losowa X jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach:

- z zerową wartością oczekiwaną, wariancją równą 4, oraz momentem centralnym czwartego rzędu równym $5 \cdot 4^2$.

Liczba t^* dla zmiennej losowej X wynosi:

(A) 8

(B) 6

(C) 4

(D) 2

(E) 1

Zadanie 8.

Przyjmijmy, że $N_P, N_{UD}, Y_1, Y_2, Y_3, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym:

- $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają identyczny rozkład taki, że:
- $\Pr(Y_1 \leq 0) = 0$
- $\forall x > 0 \quad \Pr(Y_1 \leq x) < 1$
- N_{UD} ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami (r, q):
$$\Pr(N_{UD} = k) = \binom{r+k-1}{k}(1-q)^r q^k, \qquad k = 0,1,2,...$$
- Zaś N_P ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą $r\frac{q}{1-q}$

Niech M_{UD} oznacza maksimum spośród N_{UD} pierwszych wyrazów ciągu $Y_1, Y_2, Y_3, ...$, a dokładniej:

- $M_{UD} = \begin{cases} 0 & gdy \quad N_{UD} = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, ... Y_{N_{UD}}) & gdy \quad N_{UD} > 0 \end{cases}$

Zaś niech M_P oznacza odpowiednio maksimum spośród N_P pierwszych wyrazów ciągu $Y_1, Y_2, Y_3, ...$:

- $M_P = \begin{cases} 0 & gdy \quad N_P = 0 \\ \max(Y_1, Y_2, ... Y_{N_P}) & gdy \quad N_P > 0 \end{cases}$

Wybierz zdanie, które poprawnie charakteryzuje relację rozkładów zmiennych losowych M_{UD} oraz M_P.

(A) Dla dowolnych $r > 0$ oraz $q \in (0,1)$ zachodzi: $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_P < x) > \Pr(M_{UD} < x)$

(B) Dla dowolnych $r > 0$ oraz $q \in (0,1)$ zachodzi: $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_P < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(C) Dla dowolnego $r > 0$ można w przedziale $(0,1)$ znaleźć zarówno takie q, że $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_P < x) > \Pr(M_{UD} < x)$, jak i takie q, że $\underset{x>0}{\forall} \Pr(M_P < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(D) Dla dowolnych $r > 0$ oraz $q \in (0,1)$ istnieje takie $x_0 > 0$, że $\underset{x\in(0,\, x_0)}{\forall} \Pr(M_P < x) > \Pr(M_{UD} < x)$, oraz $\underset{x>x_0}{\forall} \Pr(M_P < x) < \Pr(M_{UD} < x)$

(E) Dla dowolnych $r > 0$ oraz $q \in (0,1)$ istnieje takie $x_0 > 0$, że $\underset{x\in(0,\, x_0)}{\forall} \Pr(M_P < x) < \Pr(M_{UD} < x)$, oraz $\underset{x>x_0}{\forall} \Pr(M_P < x) > \Pr(M_{UD} < x)$

Zadanie 9.
Dwa nieobciążone predyktory P_1 i P_2 parametru ryzyka Θ mają błędy predykcji o wariancjach odpowiednio 9 i 4, a współczynnik korelacji liniowej tych błędów wynosi 2/3. Wariancja błędu predykcji w klasie predyktorów $P_3(z)$ zdefiniowanych następująco:

$$P_3(z) = zP_1 + (1-z)P_2, \qquad z \in [0,1],$$

osiąga wartość najmniejszą, gdy współczynnik z jest równy:

(A) 4/13

(B) 1/4

(C) 2/9

(D) 1/11

(E) 0

Zadanie 10.
W pewnym ubezpieczeniu szkody zgłaszane są w tym samym roku, w którym do nich doszło, bądź w roku następnym (opóźnienie nigdy nie jest większe). Niech $N_{t,0}$ oznacza liczbę szkód zaszłych w roku *t* i zgłoszonych jeszcze w tym roku, zaś $N_{t,1}$ liczbę szkód zaszłych w roku *t* i zgłoszonych w roku następnym.
Zakładamy, że wszystkie zmienne $N_{1,0}, N_{1,1}, N_{2,0}, N_{2,1}, N_{3,0}, N_{3,1}, \ldots$, są niezależne, przy czym zmienne:

- $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}, \ldots$ mają rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λr ,
- $N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}, \ldots$ mają rozkład Poissona o wartości oczekiwanej $\lambda(1-r)$

Na koniec roku $t = 2$ mamy następujące obserwacje:

- $N_{1,0}, N_{1,1}, N_{2,0}$.
- Przyjmujemy typowe założenie, że oba parametry (λ, r) są nieznane.

Estymator $\hat{r}$ parametru *r* uzyskany metodą największej wiarygodności w oparciu o te dane wyraża się wzorem:

(A) $$\hat{r} = \frac{N_{1,0} + N_{2,0}}{N_{1,0} + N_{2,0} + 2N_{1,1}}$$

(B) $$\hat{r} = \frac{N_{1,0} + N_{2,0}}{N_{1,0} + N_{2,0} + N_{1,1}}$$

(C) $$\hat{r} = \frac{N_{1,0}}{N_{1,0} + N_{1,1}}$$

(D) $$\hat{r} = \frac{2N_{1,0} + N_{2,0}}{2N_{1,0} + N_{2,0} + 3N_{1,1}}$$

(E) $$\hat{r} = \frac{2N_{1,0} + N_{2,0}}{2N_{1,0} + N_{2,0} + 2N_{1,1}}$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 3 grudnia 2007 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I.......................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	A	
4	E	
5	B	
6	B	
7	D	
8	B	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.