Zadanie 1.

Niech łączna wartość szkód z pewnego ubezpieczenia $W = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$ ma rozkład złożony Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą λ i rozkładem wartości pojedynczej szkody takim, że $\Pr(Y_1 \in \{0,1,2,3,...\}) = 1$. Niech:

- $W(n) = \min\{Y_1, n\} + \min\{Y_2, n\} + ... + \min\{Y_N, n\}$

oznacza łączną wartość szkód z tego ubezpieczenia po wprowadzeniu ograniczenia odpowiedzialności za każdą szkodę do wysokości *n*, gdzie *n* jest pewną liczbą naturalną. Jeśli przyjmiemy założenia liczbowe:

- $\lambda = 5$
- $\mathrm{var}[W(n)] = 400$
- $\Pr(Y_1 > n) = \dfrac{1}{3}$
- $n = 25$

wtedy $\mathrm{var}[W(n+1)]$ wynosi:

(A) 485

(B) 490

(C) 495

(D) 500

(E) 505

Zadanie 2.

Rozważa się niekiedy następującą formułę składki $\Pi(X)$ za ryzyko *X*:

- $\Pi(X) = E(X) + E\{[X - E(X)]_+\}$,

a więc gdzie narzut na składkę netto ma postać wartości oczekiwanej nadwyżki zmiennej *X* ponad swoją wartość oczekiwaną.

Rozważmy wskaźnik względnego narzutu bezpieczeństwa w składce:

- $\theta(X) := \dfrac{\Pi(X) - E(X)}{E(X)}$

dla tej formuły.

Rozważmy też rodzinę rozkładów Pareto z dystrybuantach postaci:

- $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{v}{v+x}\right)^{\alpha}$,

gdzie parametry dystrybuant mogą przyjmować dowolne wartości spełniające warunki:

- $v > 0$ oraz $\alpha > 1$

Kres dolny zbioru wartości wskaźnika $\theta(X)$ dla ryzyk *X* z tej rodziny wynosi:

(A) 0

(B) e^{-1}

(C) $1 - e^{-1}$

(D) $e^{-1/2}$

(E) 1

Zadanie 3.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest sumą wypłat z tytułu n pierwszych wypadków
- wypłata X_i jest równa łącznej kwocie szkód z jednego wypadku: $X_i = Y_i(1) + ... + Y_i(M_i)$
- kwoty szkód $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ oraz liczby szkód przypadających na poszczególne wypadki $M_1, M_2, M_3, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeśli przyjmiemy następujące założenia:

- zmienne $Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3), ..., Y_2(1), Y_2(2), Y_2(3), ..., Y_3(1), Y_3(2), Y_3(3), ...$ mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej jeden
- zmienne $M_1, M_2, M_3, ...$ mają ten sam rozkład przesunięty geometryczny:

  $$\Pr(M_i = k) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{dla} \quad k = 1,2,...$$

- parametr składki wynosi $c = \lambda \cdot \mathrm{E}(X_1) \cdot 120\%$

wtedy współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniesie:

(A) 1/6

(B) 1/9

(C) 1/12

(D) 1/15

(E) 1/18

Zadanie 4.
Proces nadwyżki obserwujemy w momencie początkowym:

- $U_0 = u$

oraz w momentach zajścia szkód:

- $U_n = U_{n-1} + c \cdot \Delta T_n - Y_n$,

Gdzie:

- (T_n, Y_n) oznaczają moment zajścia i wartość *n*-tej szkody,
- c jest intensywnością napływu składki,
- $\Delta T_1 = T_1$ oraz $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ to czasy oczekiwania.

Zakładamy, że:

- $\Delta T_1, Y_1, \Delta T_2, Y_2, \Delta T_3, Y_3, ...$ są niezależne,
- $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, ...$ mają ten sam rozkład Gamma o gęstości $f_{\Delta T}(t) = \lambda^2 t \exp(-\lambda t)$
- $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ mają ten sam rozkład Gamma o gęstości $f_Y(y) = y \exp(-y)$

Współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*), definiujemy jako taką wartość *r*, przy której proces $V_n = \exp(-rU_n)$ spełnia dla dowolnych liczb naturalnych n, m zależność:

- $E[V_{n+m} | V_n] = V_n$,

O ile oczywiście taka dodatnia liczba *r* istnieje.

Jeśli przyjmiemy że intensywność składki wynosi:

- $c = \frac{6}{5}\lambda$,

to współczynnik dopasowania:

(A) wynosi 1/6

(B) wynosi 1/9

(C) wynosi 1/12

(D) wynosi 1/18

(E) nie istnieje

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód z całego portfela W równa jest sumie $W_1 + W_2$, oznaczających odpowiednio łączną wartość szkód z dwóch subportfeli.
Liczba szkód N_1 w pierwszym subportfelu ma rozkład dwumianowy o parametrach $(n, \quad 1/4)$ (n polis, z każdej z nich szkoda z p-stwem 0.25).
Liczba szkód N_2 w drugim subportfelu (niezależna od N_1) ma rozkład ujemny dwumianowy:

- $\Pr(N_2 = k) = \dfrac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r) \cdot k!} \cdot (1-q)^r \cdot q^k \qquad k = 0,1,...$

W obu subportfelach wartości pojedynczych szkód Y_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie ze skończoną wariancją $\mathrm{var}(Y_1)$ (w obu subportfelach jest to ten sam rozkład), niezależnymi także od liczby szkód N_1 i N_2.

Jeśli wiadomo, że $E(W_1) = E(W_2)$ oraz że $VAR(W) = E(N_1 + N_2) \cdot E(Y_1^2)$, to parametr q rozkładu zmiennej N_2 wynosi:

(A) 1/2

(B) 1/3

(C) 1/4

(D) 1/5

(E) 1/6

Zadanie 6.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = 1$,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- pojedyncze wypłaty Y_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie danym gęstością równą 1/10 na przedziale $[0, 10]$

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wtedy dla każdego $u \geq 0$ zachodzi $F_L(u) = 1 - \Psi(u)$.
Niech c^* oznacza najmniejszą z takich wartości parametru intensywności składki c, przy której $E(L) \leq 16\frac{2}{3}$. Parametr c^* wynosi:

(A) 7.5

(B) 7

(C) 6.5

(D) 6

(E) 5.5

Zadanie 7.

Mamy niepełną informację o rozkładzie zmiennej losowej X. Wiemy mianowicie, że przyjmuje ona wartości nieujemne oraz że dla dowolnego $d \in [1, 10]$ wartość oczekiwana nadwyżki tej zmiennej ponad d wynosi:

$$E[(X-d)_+] = \frac{(10-d)^2}{20}.$$

Zbiór wszystkich dopuszczalnych (w świetle posiadanej informacji) wartości dla $E(X)$ to przedział:

(A) $[5.00;\quad 5.05]$

(B) $[4.95;\quad 5.00]$

(C) $[4.90;\quad 5.00]$

(D) $[4.90;\quad 5.05]$

(E) $[4.95;\quad 5.05]$

Zadanie 8.

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ubezpieczonych rozkład Gamma z wartością oczekiwaną 1/4 i wariancją 1/40. Proces pojawiania się szkód dla ubezpieczonego z tej populacji, który charakteryzuje się wartością parametru ryzyka Λ równą λ, jest procesem Poissona z oczekiwaną liczbą szkód w ciągu roku równą λ.
Obserwujemy pewnego losowo wybranego z tej populacji ubezpieczonego. Dokładnie pół roku po rozpoczęciu obserwacji doszło do pierwszej szkody. Oczekiwana liczba szkód (warunkowa, pod ww. warunkiem), do których jeszcze ewentualnie dojdzie w ciągu następnego okresu półrocznego wynosi:

(A) 1/5

(B) 7/40

(C) 1/6

(D) 1/8

(E) 5/42

Zadanie 9.
W pewnym portfelu ubezpieczeń występuje tendencja do dłuższego czasu likwidacji dużych szkód niż szkód małych. Oto prosty model tego zjawiska:

Y, D to wartość i czas opóźnienia likwidacji losowo wybranej szkody, przy czym rozkład bezwarunkowy zmiennej D określamy następująco:

- $D = 0$ jeśli szkodę likwiduje się w tym samym roku, kiedy do niej doszło,
- $D = 1$ jeśli szkodę likwiduje się w następnym roku,
- $D = 2$ jeśli szkodę likwiduje się jeszcze rok później, itd.,

a zależność wartości szkody i opóźnienia wyraża założenie, że:

- $E(Y|D = k) = \mu \cdot (1 + w)^k$.

Rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu ilościowym dany jest więc ciągiem:

- $r_k := \Pr(D = k)$,

zaś rozkład czasu likwidacji szkody w ujęciu wartościowym dany jest ciągiem:

- $rw_k := \dfrac{r_k E(Y|D = k)}{E(Y)}$

Załóżmy, że zachodzi:

- $r_k = \binom{4}{k} \cdot \dfrac{1}{16}, \quad k = 0,1,2,3,4$,
- oraz: $w = \dfrac{1}{5}$.

Wobec tego $\dfrac{r_2}{rw_2}$ wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.984

(B) 0.992

(C) 1.000

(D) 1.008

(E) 1.017

Zadanie 10.
Oznaczmy przez X_t łączną wartość szkód zaistniałych w roku *t*, przez $X_{t,0}$ tę jej część, która dotyczy szkód zlikwidowanych przed końcem roku *t*, zaś przez $X_{t,1}$ część pozostałą. Warunkowe momenty tych zmiennych (przy danej wartości parametru ryzyka μ_t) spełniają założenia:

- $E(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t p$
- $E(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)$
- $Var(X_{t,0}|\mu_t) = \mu_t pb^2$
- $Var(X_{t,1}|\mu_t) = \mu_t(1-p)b^2$
- $Cov(X_{t,0}, X_{t,1}|\mu_t) = 0$,

zaś rozkład parametru ryzyka μ_t spełnia założenia:

- $E(\mu_t) = \mu$
- $Var(\mu_t) = a^2$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor zmiennej X_t oparty na informacji o zmiennej $X_{t,0}$ oraz znanych wartościach parametrów (p, b^2, μ, a^2) jest postaci:

- $BLUP(X_t | X_{t,0}) = cX_{t,0} + d$

Stała *d* występująca w powyższym wzorze **jest postaci**:

(A) $d = \dfrac{\mu^2 b^2}{\mu b^2 + pa^2}$

(B) $d = \dfrac{\mu b^2 (1-p)}{\mu b^2 + pa^2}$

(C) $d = \dfrac{\mu^2 b^2 (1-p)}{\mu b^2 + pa^2}$

(D) $d = \dfrac{\mu a^2}{\mu b^2 + pa^2}$

(E) $d = \dfrac{\mu a^2 (1-p)}{\mu b^2 + pa^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 14 maja 2007 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	B	
4	A	
5	D	
6	D	
7	E	
8	C	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.