Zadanie 1.

Zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $EX = EY = 1$, $EZ = 0$ i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var((X - Y)Z)$.

(A) 5

(B) 27

(C) 16

(D) 13

(E) 2

Zadanie 2.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Oblicz

$$P\left(S_{10} = 4 \text{ i } S_n \le 6 \text{ dla } n = 1,2,\ldots,9\right)$$

(A) $\frac{120}{1024}$

(B) $\frac{119}{1024}$

(C) $\frac{118}{1024}$

(D) $\frac{117}{1024}$

(E) $\frac{116}{1024}$

Zadanie 3.
Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_5$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_4$ są niezależne o tym samym rozkładzie z gęstością

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}} & gdy \quad x > 0 \\ 0 & gdy \quad x \le 0 \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Wyznaczono estymatory największej wiarogodności $\hat{\theta}_1$ i $\hat{\theta}_2$ parametru θ:
estymator $\hat{\theta}_1$ na podstawie próby $X_1, X_2, \dots, X_5$ i
estymator $\hat{\theta}_2$ na podstawie próby $Y_1, Y_2, \dots, Y_4$.
Wyznaczyć stałe *a* i *b*, tak aby

$$P\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} < a\right) = P\left(\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} > b\right) = 0{,}05$$

A) $a = 0{,}193, \quad b = 6{,}256$

(B) $a = 0{,}299, \quad b = 3{,}347$

(C) $a = 0{,}160, \quad b = 5{,}192$

(D) $a = 0{,}299, \quad b = 3{,}072$

(E) $a = 0{,}326, \quad b = 3{,}347$

Zadanie 4.

W każdej z trzech urn znajduje się 5 kul, przy czym w pierwszej urnie są 4 kule białe i 1 czarna, w drugiej 3 kule białe i 2 czarne, w trzeciej 2 białe i 3 czarne. Wykonujemy 3-etapowe doświadczenie:
1 etap: losujemy urnę (wylosowanie każdej urny jest jednakowo prawdopodobne);
2 etap: z wylosowanej urny ciągniemy 2 kule bez zwracania, a następnie dorzucamy do tej urny 1 kulę białą i 1 czarną;
3 etap: z tej samej urny ciągniemy 1 kulę.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia w trzecim etapie kuli białej, jeśli w drugim etapie wyciągnięto 2 kule białe jest równe

(A) $\frac{10}{30}$

(B) $\frac{15}{30}$

(C) $\frac{12}{30}$

(D) $\frac{20}{30}$

(E) $\frac{18}{30}$

Zadanie 5.

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{gdy} \quad y > 0 \ \text{ i } \ x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $Z = \dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ i $V = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Wtedy

(A) zmienne X i Y są niezależne

(B) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 2v$ dla $v \in (0,1)$

(C) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej V wyraża się wzorem $g(v) = 1$ dla $v \in (0,1)$

(D) zmienne Z i V są zależne

(E) funkcja gęstości rozkładu brzegowego zmiennej Z wyraża się wzorem $h(z) = \dfrac{|z|}{2\sqrt{1 - z^2}}$ dla $z \in (-1,1)$

Zadanie 6.

Rzucamy symetryczną kostka do gry tak długo, aż uzyskamy każdą liczbę oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

(A) 12,5

(B) 18,5

(C) 12,0

(D) 13,7

(E) 14,7

Zadanie 7.

Niech X_1, X_2, X_3, X_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $EX_i = im$ oraz $VarX_i = i^2 m^2$, $i = 1,2,3,4$. Niech $\tilde{m}$ będzie estymatorem parametru m minimalizującym błąd średniokwadratowy w klasie estymatorów postaci

$$\hat{m} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 ,$$

gdzie a_i, $i = 1,2,3,4$, są liczbami rzeczywistymi. Wtedy błąd średniokwadratowy

$$E(\tilde{m} - m)^2$$

jest równy

(A) $\frac{1}{3} m^2$

(B) $\frac{1}{4} m^2$

(C) $\frac{1}{5} m^2$

(D) $\frac{1}{6} m^2$

(E) m^2

Zadanie 8.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & gdy \ \ x \in (0,1) \\ 0 & gdy \ \ x \notin (0,1) \end{cases},$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Weryfikujemy hipotezę $H: \theta = 1$ przy alternatywie $K: \theta > 1$ testem jednostajnie najmocniejszym na poziomie istotności 0,05. Moc tego testu przy alternatywie $\theta = 3$ jest równa

(A) 0,95

(B) 0,44

(C) 0,79

(D) 0,98

(E) 0,65

Uwaga: Może Ci pomóc wyznaczenie rozkładu zmiennej $-\ln X_i$.

Zadanie 9.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4}.$$

Niech $Y_0 = 3$ oraz niech dla $n = 1,2,3,\ldots$ zachodzi

$$Y_n = \begin{cases} 3 & gdy \quad X_n = 3 \\ \min(Y_{n-1}, X_n) & gdy \quad X_n < 3 \end{cases}$$

Oblicz $\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \le 1)$

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 10.

Zakładamy, że zależność czynnika Y od czynnika x (nielosowego) opisuje model regresji liniowej $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, gdzie błędy ε_i są niezależne i mają rozkłady normalne o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Obserwujemy zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ przy danych wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Test najmocniejszy dla weryfikacji hipotezy

$H_0 : \beta_0 = 0$ i $\beta_1 = 1$

przy alternatywie

$H_1 : \beta_0 = 1$ i $\beta_1 = 2$

na poziomie istotności 0,05 odrzuca hipotezę H_0, gdy spełniona jest nierówność

(A) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(1 + x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)^2}} > 1{,}645$$

(B) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(1 + x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)^2}} > 1{,}645$$

(C) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i(1 + x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)^2}} > 1{,}645$$

(D) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - x_i)(1 + x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)^2} > 1{,}645$$

(E) $$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - 1)(1 + x_i)}{\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)^2} > 1{,}645$$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 czerwca 2006 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	D	
4	B	
5	B	
6	E	
7	C	
8	C	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.