Zadanie 1.
W kolejnych latach $t = 1, 2,3,...$ ubezpieczony charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne $N_1, N_2, N_3,...$ są warunkowo niezależne i mają (brzegowe) rozkłady Poissona:

- $\Pr\left(N_t = k \middle| \Lambda = \lambda\right) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\qquad t = 1, 2,3,...,\qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Parametr Λ w populacji ubezpieczonych ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda),$ $\qquad$ z parametrami: $\alpha = \dfrac{3}{2},\ \beta = 5$.

Rozważamy wariancję liczby szkód w czwartym roku:

- z rozkładu bezwarunkowego: $\mathrm{Var}(N_4)$
- oraz z rozkładu warunkowego, przy danej informacji o liczbie szkód w pierwszych trzech latach: $\mathrm{Var}\left(N_4 \middle| N_1 + N_2 + N_3\right)$.

Znajdź podzbiór K zbioru liczb naturalnych z zerem taki, że zachodzi tożsamość:

$$\{k \in K\} \Leftrightarrow \mathrm{Var}\left(N_4 \middle| N_1 + N_2 + N_3 = k\right) \le \mathrm{Var}(N_4)$$

(A) $K = \varnothing$

(B) $K = \{0\}$

(C) $K = \{0,1\}$

(D) $K = \{0,1,2\}$

(E) $K = \{0,1,2,3,4,...\}$

Zadanie 2.
Rozważmy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela:

- szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ
- szkody mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}
- intensywność napływu składki wynosi $(1+\theta)\lambda\beta^{-1}$
- nadwyżka początkowa wynosi u

Niech:

- A oznacza zdarzenie, że do ruiny dojdzie, i że nastąpi to od razu przy pierwszej szkodzie,
- B oznacza zdarzenie, iż do ruiny dojdzie, i że nastąpi to w momencie, w którym nadwyżka po raz pierwszy spadnie poniżej wartości początkowej u.

Czy informacja, że $\theta = 20\%$ wystarcza, aby wyznaczyć wartość prawdopodobieństwa warunkowego zajścia zdarzenia A pod warunkiem B? Wybierz najbardziej trafną odpowiedź:

(A) Informacja o wartości θ wystarczy, $\Pr(A|B) = 6/11$

(B) Konieczna i dostateczna informacja to wartości parametrów θ oraz u

(C) Konieczna i dostateczna informacja to wartość parametru θ i iloczynu βu

(D) Informacja o wartości θ wystarczy, $\Pr(A|B) = 1/2$

(E) Informacja o wartości θ wystarczy, $\Pr(A|B) = 6/10$

Zadanie 3.

Momenty zajścia kolejnych szkód $T_1 < T_2 < ... < T_n < ...$ tworzą proces Poissona na przedziale $(0,\infty)$, o intensywności λ, a więc:

- T_1, $T_2 - T_1$, $T_3 - T_2$, $T_4 - T_3$,...

są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Każda szkoda, niezależnie od pozostałych, jest likwidowana po upływie pewnego losowego okresu czasu. Mówiąc dokładniej, momenty likwidacji są zmiennymi losowymi postaci:

- $\tilde{T}_1 = T_1 + D_1$, $\tilde{T}_2 = T_2 + D_2$,..., $\tilde{T}_n = T_n + D_n$,...

przy czym odstępy czasu między zajściem a likwidacją szkód D_i są niezależne nawzajem oraz od $T_1, T_2, T_3,...$ i mają taki sam rozkład. Zakładamy, że jest to też rozkład wykładniczy o takiej samej wartości oczekiwanej $1/\lambda$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że dla pewnego ustalonego n likwidacja szkody $(n+1)$-szej poprzedzi likwidację szkody n-tej, a więc:

- $\Pr\left(\tilde{T}_{n+1} < \tilde{T}_n\right)$

wynosi:

(A) 1/3

(B) 1/4

(C) 1/5

(D) 1/6

(E) 1/8

Zadanie 4.

Proces nadwyżki towarzystwa ubezpieczeniowego ma postać:

- $U_t = u + (c - du)t - S_t$,

gdzie:

- skumulowane wypłaty odszkodowań S_t mają dla każdego $t > 0$ rozkład normalny $(t\mu, t\sigma^2)$,
- w zamian za kapitał u udziałowcy otrzymują dywidendę wypłacaną w sposób ciągły z intensywnością du,
- c to intensywność składki płaconej przez ubezpieczonych, z czego $c - du$ pozostaje w towarzystwie.

Przyjmijmy następujące wartości liczbowe wybranych parametrów procesu:

- stopa dywidendy wynosi: $d = 5\%$,
- parametry procesu S_t wynoszą: $\mu = 300$, $\sigma^2 = 2000$.

Niech $\Psi(u,c)$ oznacza funkcję (dwóch argumentów – kapitału początkowego i intensywności płaconej składki) prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu.

Znajdź (dobierając odpowiednio optymalną wysokość kapitału początkowego) najmniejszą wartość c^* spośród takich wartości *c*, dla których zachodzi:

- $\Psi(u,c) = \exp\left(-\frac{9}{2}\right)$

(A) $c^* = 315$

(B) $c^* = 320$

(C) $c^* = 330$

(D) $c^* = 345$

(E) $c^* = 360$

Zadanie 5.
Łączna wartość szkód X z pewnego ryzyka ma (warunkowo, przy danej wartości parametru ryzyka Λ) złożony rozkład Poissona z parametrami $(\Lambda, F_{Y/\Lambda}(\cdot))$, a warunkowa wartość oczekiwana pojedynczej szkody Y dana jest wzorem:

- $E(Y|\Lambda) = 1000(1 - \exp(-2\Lambda))$.

Parametr ryzyka Λ ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = 64\lambda \exp(-8\lambda)$.

$E(X)$ wynosi:

(A) 90.0

(B) 98.5

(C) 108.0

(D) 122.0

(E) 133.3

Zadanie 6.

Zysk techniczny towarzystwa ubezpieczeniowego za rok czasu jest równy otrzymanej składce c pomniejszonej o łączną kwotę odszkodowań W.

Udziałowcy towarzystwa partycypują w formie dywidendy w połowie zysku technicznego (o ile jest on dodatni) natomiast nie partycypują w stracie technicznej. W rezultacie zysk zatrzymany ZZ (udział towarzystwa w zysku technicznym) wynosi:

- $ZZ = \frac{1}{2}(c - W)_+ - (W - c)_+$

Jeśli przyjmiemy że składka $c = \frac{3}{2}$, zaś łączna wartość szkód W ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, to $\mathrm{E}(ZZ)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(B) $\frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(C) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

(E) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\exp\left(-\frac{3}{2}\right)$

Zadanie 7.

Niech $W = X_1 + X_2 + ... + X_{10}$ bedzie sumą dziesięciu niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie, o którym wiemy, że:

- $E\left[(X - EX)^2\right] = 1$
- $E\left[(X - EX)^4\right] = 4$

Wobec tego moment centralny czwartego rzędu $\mathrm{E}\left[(W - \mathrm{E}W)^4\right] = 4$ zmiennej W wynosi:

(A) 40

(B) 70

(C) 130

(D) 220

(E) 310

Zadanie 8.
Niech $W = Y_1 + ... + Y_N$ oznacza łączną wartość szkód o złożonym rozkładzie Poissona z częstotliwością szkód $\mathrm{E}(N) = \lambda$ i rozkładem wartości pojedynczej szkody określonym na półosi nieujemnej, danym dystrybuantą $F_Y(\cdot)$. Oznaczmy przez σ_W i γ_W odpowiednio odchylenie standardowe i współczynnik skośności zmiennej *W*, zaś przez *M* maksymalną wartość szkody:

- $M = \inf\{m: \quad F_Y(m) = 1\}, \quad M < \infty$

Najmniejsza liczba c^* spośród liczb *c* takich, dla których przy powyższych założeniach zachodzi implikacja:

- $\left(M \le \frac{1}{8}\sigma_W\right) \Rightarrow (\gamma_W \le c)$

jest równa:

(A) $c^* = \frac{1}{2}$

(B) $c^* = \frac{1}{4}$

(C) $c^* = \frac{1}{8}$

(D) $c^* = \frac{1}{16}$

(E) ta implikacja nie jest prawdziwa dla żadnej skończonej liczby *c*

Zadanie 9.
O rozkładzie zmiennej X wiemy, że:

- $\Pr(X \le 5) = \frac{1}{2}$,
- $\Pr(X \le 10) = \frac{3}{4}$,
- $\mathrm{E}\left[(X-10)_+\right] = 10$,
- $\mathrm{E}\left[X \middle| X \in (5,10]\right] = 8$.

Wobec tego $\mathrm{E}\left[(X-5)_+\right]$ wynosi:

(A) informacja jest niewystarczająca do wyznaczenia $\mathrm{E}\left[(X-5)_+\right]$

(B) $11\frac{1}{4}$

(C) $11\frac{1}{2}$

(D) $11\frac{3}{4}$

(E) 12

Zadanie 10.

Zmienna losowa N opisująca liczbę zgłoszonych roszczeń w okresie roku ma rozkład ujemny dwumianowy o parametrach (r, q):

- $P(N = k) = \binom{r+k-1}{k}(1-q)^r q^k$ dla $k = 0,1,2,\ldots$.

Każde roszczenie z prawdopodobieństwem s jest rozpatrzone w roku zgłoszenia i z prawdopodobieństwem $1-s$ w roku następnym. Niech M oznacza liczbę roszczeń zgłoszonych i rozpatrzonych w tym samym roku.

- $E(N \mid M = m)$ dana jest wzorem:

(A) $\dfrac{(r+m)q(1-s)}{1-q(1-s)}$

(B) $\dfrac{(r+m)[1-q(1-s)]}{q(1-s)}$

(C) $\dfrac{rq(1-s)}{1-q(1-s)} + m$

(D) $\dfrac{rq(1-s)+m}{1-q(1-s)}$

(E) $\dfrac{(r+m)[1-q(1-s)]}{q(1-s)} + m$

Egzamin dla Aktuariuszy z 16 maja 2005 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ ....K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	B	
4	C	
5	D	
6	A	
7	E	
8	C	
9	E	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.