Zadanie 1. W kolejnych okresach czasu $t = 1, 2$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Λ, generuje N_t szkód. Dla danego $\Lambda = \lambda$ zmienne N_1, N_2 są warunkowo niezależne i mają (brzegowe) rozkłady Poissona:

$$\Pr(N_t = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad t = 1, 2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Parametr ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda).$$

Jeśli parametry zadania wynoszą: $\alpha = 2$, $\beta = 9$,

to iloraz wartości oczekiwanych: $\dfrac{\mathrm{E}(N_2 | N_1 > 0)}{\mathrm{E}(N_2)}$

z dobrym przybliżeniem wynosi:

(A) 1.264

(B) 1.346

(C) 1.426

(D) 1.585

(E) 1.610

Zadanie 2. Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z rozkładem wartości pojedynczej szkody o gęstości danej na półosi dodatniej wzorem:

$$f(y) = \frac{4}{10}\exp(-y) + \frac{12}{10}\exp(-2y).$$

Wiadomo, że przy tych założeniach prawdopodobieństwo ruiny jako funkcja kapitału początkowego u wyraża się dla $u \geq 0$ wzorem:

$$\Psi(u) = a_1 \exp(-r_1 u) + a_2 \exp(-r_2 u).$$

Jeśli wiadomo że:

$$\Psi(u) = \frac{3}{175}\exp\left(-\frac{1}{5}u\right) + \frac{144}{175}\exp(-r_2 u),$$

to brakujący parametr r_2 tego wzoru wynosi:

(A) 7/5

(B) 5/3

(C) 3/2

(D) 8/5

(E) 7/4

Zadanie 3. Mamy trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0,1)$,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej β^{-1},
- Y – wartość szkody.

Przyjmujemy oczywiście, że jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej T, jak i dla zmiennej D) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz D są nawzajem niezależne.
- Wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i długo trwającej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie:

$$\mathrm{E}(Y|D,T) = \mathrm{E}(Y|D) = \exp(rD), \qquad \text{gdzie } 0 < r < \beta .$$

Oczekiwana wartość szkody, do której doszło w ciągu tego roku, ale która przed końcem roku nie została zlikwidowana, a więc:

$$E(Y|T + D > 1)$$

wynosi:

(A) $\dfrac{\beta}{\beta - r}$

(B) $\dfrac{\beta}{\beta - r}\exp(r)$

(C) $\dfrac{\exp(\beta) - \exp(r)}{\exp(\beta) - 1}$

(D) $\dfrac{\beta}{\beta - r}\dfrac{\exp(\beta) - \exp(r)}{\exp(\beta) - 1}$

(E) $\left(\dfrac{\beta}{\beta - r}\right)^2 \dfrac{\exp(\beta) - \exp(r)}{\exp(\beta) - 1}$

Zadanie 4. W klasycznym modelu procesu nadwyżki $U(t) = u + ct - S_{N(t)}$

- u jest nadwyżką początkową,
- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wypłat,
- pojedyncze wypłaty Y_i są zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$.

Niech L oznacza maksymalną stratę, F_L jej dystrybuantę, zaś $\Psi(u)$ prawdopodobieństwo ruiny przy nadwyżce początkowej u. Wiadomo, że zachodzi:

$$F_L(u) = 1 - \Psi(u) = \Pr(\forall t \geq 0 \quad U(t) \geq 0).$$

Załóżmy, że wypłaty Y_i mają rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną μ, oraz iż parametr intensywności składki c wynosi $c = 105\%\lambda\mu$.

Wartość funkcji $\Psi(u)$ w punkcie $u = \mathrm{E}(L) + 1{,}645\sqrt{\mathrm{Var}(L)}$ wynosi:

(A) 4.3%

(B) 5%

(C) 5.7%

(D) 6.4%

(E) 7.1%

Uwaga (dopisana po egzaminie):
Warto sprawdzić, że wartość $\Psi\left(\mathrm{E}(L) + q_\varepsilon \sqrt{\mathrm{Var}(L)}\right)$, gdzie q_ε jest kwantylem standaryzowanej zmiennej normalnej (w zadaniu rzędu 0.95), jest bardzo stabilna:

- dla kwantyli rozsądnych rzędów (powiedzmy, od 0.8 do 0.99)
- i dla rozsądnych wartości parametru θ (powiedzmy, z przedziału (0%, 50%)

jest niemal stałą funkcją parametru θ, a więc niewielki błąd popełniamy wyznaczając jego wartość jako granicę przy θ zbiegającym do zera (od góry).

Zadanie 5. Rozkład warunkowy łącznej wartości szkód $X = Y_1 + ... + Y_N$ z pojedynczego ryzyka (pochodzącego z pewnej populacji ryzyk) przy danej wartości parametru ryzyka Λ jest złożonym rozkładem Poissona:

- o oczekiwanej liczbie szkód $\mathrm{E}(N|\Lambda) = \Lambda$;
- o wartości pojedynczej szkody Y takiej, że $\mathrm{E}(Y|\Lambda) = \Lambda$

Parametr ryzyka Λ ma w populacji ryzyk rozkład Gamma o wartości oczekiwanej 1/4 i wariancji 1/80.
Przeprowadzamy dwuetapowe doświadczenie:

- losujemy ryzyko z ww. populacji
- obserwujemy liczbę szkód N oraz (o ile $N > 0$) ich wartości $Y_1,...,Y_N$.

Oczekiwana średnia wartość dwóch szkód (pod warunkiem, że właśnie do dwóch szkód doszło):

$$\mathrm{E}\left(\tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\middle| N = 2\right)$$

wynosi:

(A) 7/24

(B) 1/4

(C) 5/12

(D) 1/3

(E) 3/8

Zadanie 6. Ubezpieczyciel rozważa, po jakiej składce zaoferować swoje usługi, mając na uwadze, iż liczba ryzyk *n*, które podejmą jego ofertę, jest malejącą funkcją składki za jedno ryzyko *P*. Zakładamy, że funkcja ta (zależność popytu od ceny) ma postać:

- $n = 10000 - 8000P \qquad \text{dla} \qquad P \in [0, \quad 5/4]$

Podejmując decyzję co do wysokości składki jednostkowej *P* (i w konsekwencji rozmiarów swojego portfela ryzyk *n*), ubezpieczyciel kieruje się maksymalizacją funkcji użyteczności o postaci:

- $u(x) = -\exp\left(-\frac{x}{1000}\right)$

O łącznej wartości szkód $W(n)$ wiemy, że:

- ma wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(W(n)) = n$,
- ma wariancję $\mathrm{Var}(W(n)) = 100n$,
- zaś pozostałe charakterystyki ma takie, że dla $n > 400$ rozkład $W(n)$ daje się dobrze przybliżać rozkładem Gamma.

Optymalna wysokość składki *P* wynosi (z dobrym przybliżeniem):

(A) 1.108

(B) 1.125

(C) 1.152

(D) 1.176

(E) trudno optymalną składkę określić, bo rachunki prowadzą do $P \geq 1.200$, co implikuje $n \leq 400$, a to podważa zasadność aproksymacji rozkładem Gamma

Zadanie 7. Niech $W = X_1 + X_2 + ... + X_n$ oznacza łączną wartość szkód z portfela liczącego n nawzajem niezależnych ryzyk, przy czym n jest duże (formalnie: przynajmniej 2). Ryzyka te mają rozkłady złożone dwumianowe o parametrach:

- $X_i \sim$ złożony dwumianowy $(1, q_i, F_Y)$, $\quad i = 1,2,...,n$,

a więc w przypadku każdego z ryzyk może dojść co najwyżej do jednej szkody, przy czym wartość szkody (o ile do niej dojdzie) ma dla wszystkich ryzyk ten sam rozkład dany dystrybuantą F_Y, natomiast prawdopodobieństwa zajścia szkody q_i dla różnych ryzyk są różne.

Zmienna losowa $\tilde{W}$ (o rozkładzie mającym z założenia aproksymować rozkład zmiennej W) ma rozkład złożony dwumianowy o parametrach:

- $\tilde{W} \sim$ złożony dwumianowy $(n, \bar{q}, F_Y)$,

gdzie $\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$ jest średnim (w portfelu) prawdopodobieństwem zajścia szkody.

Posiadamy następujące informacje:

$$\frac{\mathrm{Var}(Y)}{(\mathrm{E}Y)^2} = 1, \qquad \bar{q} = \frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_i - \bar{q})^2 = \frac{1}{400}$$

Stosunek wariancji $\dfrac{\mathrm{Var}(\tilde{W})}{\mathrm{Var}(W)}$ wynosi:

(A) 36/35

(B) 56/55

(C) 76/75

(D) 96/95

(E) 116/115

Zadanie 8. X_1 oraz X_2 to dwa ryzyka (zmienne losowe) niezależne o tym samym rozkładzie danym dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & gdy \quad x < 0 \\ 0.6 + 0.3x & gdy \quad x \in [0, 1) \\ 1 & gdy \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, iż ich suma nie przekroczy liczby 2/3, czyli $(F * F)(2/3)$ wynosi:

(A) 0.66

(B) 0.62

(C) 0.60

(D) 0.56

(E) 0.50

Zadanie 9. Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$

gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o rozkładzie wykładniczym, danym na półosi dodatniej gęstością:

$$f_W(x) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right),$$

zaś nadwyżka początkowa $u = 3$,
a składka za okres czasu wynosi $c = 3$.

Prawdopodobieństwo, iż do ruiny dojdzie w ciągu dwóch pierwszych okresów, a więc iż zajdzie zdarzenie: $\{U_1 < 0 \quad \text{lub} \quad U_2 < 0\}$, wynosi (w przybliżeniu do trzeciego miejsca dziesiętnego):

(A) 0.069

(B) 0.083

(C) 0.097

(D) 0.111

(E) 0.125

Zadanie 10. Zmienna losowa X przyjmuje wartości nieujemne, i ma na półosi dodatniej rozkład ciągły. Dla dwóch znanych punktów d_1 i d_2 takich, że $0 < d_1 < d_2$, znamy wartości dystrybuanty zmiennej X oraz wartości oczekiwane nadwyżki tej zmiennej ponad d_1 i ponad d_2 :

i	d_i	$F_X(d_i)$	$E[(X-d_i)_+]$
1	2	0.60	5
2	4	0.80	4.3

Przy tych danych warunkowa przedziałowa wartość oczekiwana X na przedziale $(2, 4)$, czyli $E(X/X \in (2, 4))$ wynosi:

(A) 3.50

(B) 3.25

(C) 3.00

(D) 2.75

(E) 2.50

Egzamin dla Aktuariuszy z 11 października 2004 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	E	
4	E	
5	D	
6	C	
7	C	
8	B	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.