Zadanie 1.

Komplet klocków *Domino* składa się z 28 klocków, każdy klocek odpowiada nieuporządkowanej parze liczb (i, j), $i, j = 0,1,2,\dots,6$.

Mówimy, że klocek *B(k,l)* możemy dołożyć do klocka *A(i,j)*, jeżeli *k=i* lub *k=j* lub *l*=i lub *l*=j. Dwa klocki pasujące układamy tak, aby jednakowe liczby były obok siebie, na przykład: *A(1,2)B(2,0)*. Następny klocek możemy dołożyć do otrzymanego ciągu, jeżeli jest na nim liczba równa jednej ze skrajnych liczb otrzymanego ciągu (w przykładzie liczba 1 lub 0).

Losujemy kolejno trzy klocki *K*, *L*, *M* bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo, że klocek *M* możemy dołożyć do ciągu utworzonego z klocków *K* i *L*, jeżeli wiadomo, że klocki *K* i *L* pasują do siebie.

(A) $\frac{41}{91}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{6}{13}$

(D) $\frac{11}{26}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi.

Zadanie 2.

Niech $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto o gęstości

$$p_{\lambda,\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\theta \theta}{(x+\lambda)^{\theta+1}} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 1$, $\lambda > 0$ są ustalonymi liczbami.

Wyznaczyć $E(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \mid \min(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = t)$, gdzie t jest ustaloną liczbą większą od 0.

(A) $nt + \dfrac{\lambda + t}{\theta - 1}$

(B) $nt + \dfrac{(n-1)(\lambda + t)}{n(\theta - 1)}$

(C) $nt + (n-1)\dfrac{\lambda + t}{\theta - 1}$

(D) $n\left(t + \dfrac{\lambda + t}{\theta - 1}\right)$

(E) $nt + (n-1)\dfrac{\lambda}{\theta - 1}$.

Zadanie 3.
Zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną (0,0,0) i macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $Var((X+Y)Z)$.

(A) 12,5

(B) 9,5

(C) 11

(D) 10,25

(E) 8,75

Zadanie 4.

Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ będzie zmienną losową o rozkładzie wielomianowym $Mult(n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$, gdzie wektor $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ ($p_i \geq 0$ dla $i = 1,2,\ldots,k$ oraz $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$) jest wektorem nieznanych parametrów. Rozważamy problem estymacji wektora p przy kwadratowej funkcji straty $L(p, \hat{p}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(p_i - \hat{p}_i)^2$.

Wśród estymatorów wektora p postaci $\hat{p} = (aX_1 + b, aX_2 + b, \ldots, aX_k + b)$ (gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi) o ryzyku (to znaczy $EL(p, \hat{p})$) stałym, niezależnym od p, najmniejsze ryzyko ma estymator, dla którego

(A) $a = \dfrac{1}{n - \sqrt{n}}, \; b = \dfrac{-1}{k(\sqrt{n} - 1)}$

(B) $a = \dfrac{1}{n - \sqrt{n}}, \; b = \dfrac{-1}{2(\sqrt{n} - 1)}$

(C) $a = \dfrac{1}{n + \sqrt{n}}, \; b = \dfrac{1}{2(\sqrt{n} + 1)}$

(D) $a = \dfrac{1}{n + \sqrt{n}}, \; b = \dfrac{1}{k(\sqrt{n} + 1)}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna

Zadanie 5.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^{\theta+1}} & dla \quad x > 1 \\ 0 & dla \quad x \le 1, \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem. Budujemy przedział ufności dla parametru θ postaci $\left[\frac{d}{n}\hat{\theta}, \frac{c}{n}\hat{\theta}\right]$ na poziomie ufności $1-\alpha$, gdzie liczby c i d są dobrane tak, aby

$$P_\theta\left\{\theta < \frac{d}{n}\hat{\theta}\right\} = P_\theta\left\{\theta > \frac{c}{n}\hat{\theta}\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

i $\hat{\theta}$ jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ.
Przy $n = 20$ i $\alpha = 0{,}05$ przedział ufności ma postać:

(A) $\left[0{,}663\hat{\theta},\ 1{,}394\hat{\theta}\right]$

(B) $\left[0{,}812\hat{\theta},\ 1{,}242\hat{\theta}\right]$

(C) $\left[0{,}611\hat{\theta},\ 1{,}484\hat{\theta}\right]$

(D) $\left[0{,}480\hat{\theta},\ 1{,}709\hat{\theta}\right]$

(E) $\left[0{,}325\hat{\theta},\ 2{,}048\hat{\theta}\right]$

Zadanie 6.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie oba parametry są nieznane. Estymując parametr μ^2 wyznaczono dwa estymatory T_1 - estymator największej wiarogodności i T_2 - estymator nieobciążony o minimalnej wariancji.
Różnica ryzyk estymatora T_1 i estymatora T_2 przy kwadratowej funkcji straty jest równa

(A) $\dfrac{\sigma^4 (n+1)}{n^2 (n-1)}$

(B) $\dfrac{\sigma^4 (n-3)}{n^2 (n-1)}$

(C) $\dfrac{2\sigma^4}{n^2 (n-1)}$

(D) $\dfrac{\sigma^4}{n^2}$

(E) $-\dfrac{\sigma^4}{n^2}$

Zadanie 7.

Obserwujemy pary $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{20}, Y_{20})$ zmiennych losowych. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(m_x, 1)$, a zmienne $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ o rozkładzie normalnym $N(m_y, \sigma^2)$, gdzie $\sigma^2 = 4$. Wszystkie zmienne są niezależne. Rozważamy test najmocniejszy hipotezy:

$H_0: (m_x, m_y) = (0,\ 0)$

przeciw alternatywie:

$H_1: (m_x, m_y) = (1,\ 1)$,

na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$.

Wyznaczyć prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju tego testu.

(A) jest mniejsze niż 0,001

(B) 0,004

(C) 0,048

(D) 0,371

(E) 0,010

Zadanie 8.
Niech $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 1, a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 2. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 4. Wszystkie zmienne są niezależne. Niech

$$T = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & gdy \quad N \geq 1 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases} \qquad S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} Y_i & gdy \quad N \geq 1 \\ 0 & gdy \quad N = 0 \end{cases}$$

Obliczyć współczynnik korelacji *corr(T,S)* między zmiennymi *T* i *S*.

(A) 0

(B) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{2}$

Zadanie 9.
Losujemy n $(n \geq 3)$ niezależnych realizacji zmiennej losowej z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, \theta)$ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & dla \quad 0 < x < \theta \\ 0 & dla \quad x \notin (0, \theta) \end{cases}.$$

Po uporządkowaniu zaobserwowanych wartości w ciąg rosnący $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tworzymy przedział $(2x_1, 2x_{n-1})$.
Dobrać najmniejsze *n*, przy którym prawdopodobieństwo tego, że tak utworzony przedział pokrywa wartość parametru θ jest większe niż 0,9.

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Zadanie 10.

Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o dwóch stanach $\{1, 2\}$ jest postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Niech X_n oznacza stan łańcucha w momencie *n*.

Obliczyć $\lim_{n \to +\infty} E(X_n X_{n+1})$.

(A) $\frac{5}{2}$

(B) $\frac{13}{5}$

(C) $\frac{19}{8}$

(D) 2

(E) granica zależy od rozkładu początkowego na przestrzeni stanów.

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 czerwca 2004 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ : ....KLUCZ ODPOWIEDZI...................................

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	C	
3	D	
4	D	
5	C	
6	B	
7	B	
8	E	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.