Zadanie 1. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż w dwóch *kolejnych* rzutach pojawią się „reszki''. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

(E) 6

Wskazówka: jeśli w rzucie numer n jest orzeł to przyjmijmy, że „układ jest w stanie 0”. Jeśli w rzucie numer n jest reszka a w rzucie $n-1$ był orzeł, to „układ jest w stanie 1”. Kończymy, gdy „układ znajdzie się w stanie 2”. W ten sposób definiujemy łańcuch Markowa. Rozpatrz wartość oczekiwaną liczby rzutów w zależności od stanu układu.

Zadanie 2. Rozważmy niezależne zmienne losowe $W_0, W_1, ..., W_n, ...$ o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona wartością oczekiwaną λ, niezależną od $W_0, W_1, ..., W_n, ...$ Oblicz dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

$$Y = \min\{W_0, W_1, ..., W_N\}.$$

(A) $\Pr(Y \le y) = 1 - \exp\left[\lambda\left(e^{-y/\mu} - 1\right) - y/\mu\right]$

(B) $\Pr(Y \le y) = 1 - \exp\left[\lambda\left(e^{-y/\mu} - 1\right)\right]$

(C) $\Pr(Y \le y) = 1 - \exp\left[-\lambda\, y/\mu\right]$

(D) $\Pr(Y \le y) = 1 - \exp\left[-y/(\mu\lambda)\right]$

(E) $\Pr(Y \le y) = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + y/\mu}$

Zadanie 3. Rozpatrzmy standardowy model jednokierunkowej analizy wariancji. Niech X_{ij} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $(i=1,...,k;\ j=1,...n_i)$, przy czym $E[X_{ij}]=\mu_i$ i $Var[X_{ij}]=\sigma^2$. Przyjmijmy typowe oznaczenia:

$$SSW=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2\,,\qquad SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X})^2\,,$$

gdzie

$$\overline{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}\,,\qquad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}\,,\qquad n=\sum_{i=1}^{k}n_i\,.$$

Przy założeniu, że hipoteza o jednorodności jest prawdziwa, czyli że $\mu_1=...=\mu_k$, oblicz

$$E\frac{SSW}{SST}\,.$$

(A) $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}n_i^2}{k+\sum_{i=1}^{k}n_i^2}$

(B) $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}n_i^2}{n^2}$

(C) $\dfrac{n-k-1}{n-1}$

(D) $\dfrac{n-k}{n-1}$

(E) $\dfrac{n-k}{n}$

Zadanie 4. Niech $W_1, W_2, ..., W_n$ ($n > 1$) będzie próbką z rozkładu wykładniczego o wartości oczekiwanej μ. Rozważmy estymatory parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = aS, \quad \text{gdzie } S = \sum_{i=1}^{n} W_i .$$

Znajdź liczbę a, dla której błąd średniokwadratowy estymatora, czyli wielkość

$$E(\hat{\mu} - \mu)^2$$

jest najmniejszy.

(A) $a = \frac{1}{n}$

(B) $a = \frac{1}{n-1}$

(C) $a = \frac{1}{n+1}$

(D) $a = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(E) nie istnieje liczba a dla której błąd średniokwadratowy odpowiadającego jej estymatora jest jednostajnie najmniejszy (najmniejszy przy każdej wartości μ)

Zadanie 5. Załóżmy, że $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Rozważmy ciąg średnich geometrycznych $\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n}$. Wybierz prawdziwe stwierdzenie.

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n} \le \frac{1}{2}\right) = 0$

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n} \le \frac{1}{3}\right) = 0$

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n} \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n} \le \frac{1}{e}\right) = 1$

(E) $\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\sqrt[n]{U_1 U_2 ... U_n} \le \frac{1}{3}\right) = 1$

Zadanie 6. Zakładamy, że każda pojedyncza szkoda, niezależnie od pozostałych, jest likwidowana:

- W roku, w którym została zgłoszona – z prawdopodobieństwem θ;
- W drugim roku po zgłoszeniu – z prawdopodobieństwem $\theta(1-\theta)$;
- W trzecim roku lub później – z prawdopodobieństwem $(1-\theta)^2$.

Dane, którymi dysponujemy dotyczą n szkód. Wiemy, że spośród nich:

- n_1 zostało zlikwidowanych w roku, w którym zostały zgłoszone;
- n_2 zostało zlikwidowanych w drugim roku po zgłoszeniu;
- n_3 zostało zlikwidowanych w trzecim roku lub później,

gdzie $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Podaj estymator największej wiarogodności parametru θ na podstawie tych danych.

(A) $\hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2}{n + n_3}$

(B) $\hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2}{2n - n_1}$

(C) $\hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2}{2n - n_3}$

(D) $\hat{\theta} = \frac{n_1}{n}$

(E) $\hat{\theta} = \frac{n_1^2}{n^2} + \left(1 - \sqrt{\frac{n_3}{n}}\right)\frac{n_2 + n_3}{n}$

Zadanie 7. Rozpatrzmy następujący schemat losowania. Mamy sześć urn, ponumerowanych liczbami 1,2,3,4,5,6.

W urnie nr. i znajduje się i kul czarnych i $7-i$ kul białych ($i = 1,2,3,4,5,6$).

Najpierw rzucamy kostką do gry. Jeśli otrzymamy i oczek, to wybieramy urnę oznaczoną numerem i. Losujemy z tej urny kolejno, bez zwracania, 2 kule. Niech B_1 oznacza zdarzenie losowe polegające na wyciągnięciu białej kuli w pierwszym losowaniu, zaś B_2 - zdarzenie polegające na wyciągnięciu białej kuli w drugim losowaniu.

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr(B_2 \mid B_1)$.

(A) $\Pr(B_2 \mid B_1) = 5/9$

(B) $\Pr(B_2 \mid B_1) = 4/9$

(C) $\Pr(B_2 \mid B_1) = 1/2$

(D) $\Pr(B_2 \mid B_1) = 20/41$

(E) $\Pr(B_2 \mid B_1) = 5/7$

Zadanie 8. $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ jest próbką z rozkładu normalnego o *znanej* wartości oczekiwanej μ i *nieznanej* wariancji σ^2. Rozważmy test hipotezy

$$H_0 : \sigma^2 \le 4$$

przeciwko alternatywie

$$H_1 : \sigma^2 > 4,$$

który jest najmocniejszy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Dla jakich wartości wariancji moc tego testu jest niemniejsza, niż 0.95? Podaj zbiór

$$M = \{\sigma^2 : \ moc\ testu \ge 0.95\}$$

(A) $M = [9.29, \infty)$

(B) $M = [4.46, \infty)$

(C) $M = [18.58, \infty)$

(D) $M = [20.35, \infty)$

(E) $M = [31.08, \infty)$

Zadanie 9. Zakładamy, że $X_1,\dots,X_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, przy czym :

$E[X_i]=\mu$ - wartość oczekiwana wszystkich zmiennych jest *jednakowa i nieznana;*

$Var[X_i]=\dfrac{\sigma^2}{w_i}$ - wariancje zmiennych są różne; wagi w_i są *znane* a σ^2 jest *nieznanym parametrem*.

Należy zbudować przedział ufności $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]$ dla σ^2 na poziomie ufności $1-\alpha=0.90$. Dla którego z poniższych przedziałów prawdziwa jest równość

$$\Pr(\hat{\sigma}_1^2\le\sigma^2\le\hat{\sigma}_2^2)=0.90\ ?$$

(A) $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X})^2}{16.9190},\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X})^2}{3.3251}\right]$, gdzie $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$

(B) $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{16.9190},\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{3.3251}\right]$, gdzie $\overline{X}_w=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_iX_i}{\sum_{i=1}^{10}w_i}$

(C) $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{18.3070},\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{3.9403}\right]$, gdzie $\overline{X}_w=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_iX_i}{\sum_{i=1}^{10}w_i}$

(D) $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X}_w)^2}{18.3070\sum_{i=1}^{10}w_i},\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X}_w)^2}{3.9403\sum_{i=1}^{10}w_i}\right]$, gdzie $\overline{X}_w=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_iX_i}{\sum_{i=1}^{10}w_i}$

(E) $[\hat{\sigma}_1^2,\hat{\sigma}_2^2]=\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{\gamma_{0.95}\left(\sum_{i=1}^{10}w_i/2;\,1/2\right)},\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_i(X_i-\overline{X}_w)^2}{\gamma_{0.05}\left(\sum_{i=1}^{10}w_i/2;\,1/2\right)}\right]$, gdzie $\overline{X}_w=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}w_iX_i}{\sum_{i=1}^{10}w_i}$,

zaś symbol $\gamma_p(\alpha,\lambda)$ oznacza kwantyl rzędu p rozkładu Gamma z parametrem kształtu α i parametrem skali λ

Zadanie 10. Załóżmy, że $U_0, U_1, ..., U_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną

$$E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right).$$

(A) $E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right) = \dfrac{n}{n+1}$

(B) $E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right) = \dfrac{n + U_0^n}{n+1}$

(C) $E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right) = \dfrac{n + U_0^{n+1}}{n+1}$

(D) $E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right) = \dfrac{n + U_0}{n+1}$

(E) $E\left(\max\{U_0, U_1, ..., U_n\} \mid U_0\right) = \dfrac{n}{n + U_0}$

XXXI Egzamin dla Aktuariuszy z 6 grudnia 2003 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... **K L U C Z O D P O W I E D Z I** ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	D	
4	C	
5	B	
6	B	
7	A	
8	C	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.