Zadanie 1. Dla dowolnej zmiennej losowej *X* o wartości oczekiwanej μ, wariancji $\sigma^2 < \infty$ oraz momencie centralnym μ_{2k} rzędu $2k$ zachodzą nierówności (*typu Czebyszewa*):

$$\Pr(X > \mu + t \cdot \sigma) < \frac{1}{t^{2k}} \cdot \frac{\mu_{2k}}{\sigma^{2k}}. \qquad k = 1,2,\ldots,$$

W naszym przypadku zmienna losowa *X* jest sumą pięciu niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach, o zerowej wartości oczekiwanej, wariancji równej 4, oraz momencie centralnym czwartego rzędu równym $13 \cdot 4^2$.

Niech $x_{0.95}$ oznacza kwantyl rzędu 0.95 zmiennej losowej *X*, to znaczy iż zachodzi:
$\Pr(X > x_{0.95}) = 0.05$.
Niech *C* oznacza najmniejszą z tych liczb, dla której w świetle podanych informacji zachodzi $x_{0.95} < C$.
Liczba *C* w przybliżeniu wynosi:

(A) $C \approx 12.0$

(B) $C \approx 14.1$

(C) $C \approx 15.8$

(D) $C \approx 18.0$

(E) $C \approx 20.0$

Zadanie 2. O zmiennej losowej Y wiemy, że:

1. $\Pr(Y \in [0,1]) = 2/5$,
2. $\Pr(Y \in (1,2]) = 3/5$,
3. $E(Y/Y \in [0,1]) = 1/2$
4. $E(Y/Y \in (1,2]) = 4/3$

Oznaczmy przez $\underline{\sigma^2}$ infimum, zaś przez $\overline{\sigma^2}$ supremum wariancji na zbiorze wszystkich zmiennych losowych spełniających warunki 1, 2, 3 i 4. Wybierz zdanie prawdziwe

(A) $\underline{\sigma^2} = 1/6$, $\overline{\sigma^2} = 2/5$

(B) $\underline{\sigma^2} = 1/6$ $\overline{\sigma^2} = 11/30$

(C) $\underline{\sigma^2} = 1/5$ $\overline{\sigma^2} = 11/30$

(D) $\underline{\sigma^2} = 1/5$ $\overline{\sigma^2} = 2/5$

(E) $\underline{\sigma^2} = 1/6$ $\overline{\sigma^2} = 1/3$

Zadanie 3. Zmienne losowe Y oraz N są przy danej wartości λ parametru Λ warunkowo niezależne. Rozkład warunkowy zmiennej N jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej $E(N/\Lambda = \lambda) = \lambda$. O zmiennej Y wiemy, że jej warunkowa wartość oczekiwana wynosi $E(Y/\Lambda = \lambda) = \lambda\mu$.

Bezwarunkowy rozkład parametru Λ w populacji ryzyk dany jest rozkładem gamma:

- $f_\Lambda(\lambda) = 4 \cdot \lambda \cdot \exp(-2\lambda)$,

Warunkowa wartość oczekiwana:

- $E(Y/N > 0)$

wynosi:

(A) $\frac{4}{3}\mu$

(B) $\frac{19}{15}\mu$

(C) $\frac{6}{5}\mu$

(D) $\frac{17}{15}\mu$

(E) $\frac{16}{15}\mu$

Zadanie 4. Rozkład łącznej wartości szkód X z jednego wypadku ma rozkład złożony:

$X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$, gdzie:

- $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ wyrażające wartości poszczególnych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną β^{-1}
- niezależna od nich zmienna losowa N (liczba szkód z jednego wypadku) ma rozkład logarytmiczny o parametrze ½, a więc:

  $\Pr(N = k) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k \cdot 2^k}, \qquad k = 1,2,3,...$

$E(X^3)$ wynosi:

(A) $\frac{11}{\beta^3 \cdot \ln 2}$

(B) $\frac{12}{\beta^3 \cdot \ln 2}$

(C) $\frac{13}{\beta^3 \cdot \ln 2}$

(D) $\frac{14}{\beta^3 \cdot \ln 2}$

(E) $\frac{15}{\beta^3 \cdot \ln 2}$

Zadanie 5. Nawzajem niezależne zmienne losowe X_1 oraz X_2 mają następujące rozkłady:

- X_1 ma rozkład złożony Poissona o oczekiwanej liczbie szkód $\lambda = 1$ oraz wykładniczym rozkładzie wartości pojedynczej szkody o dystrybuancie danej dla $x \geq 0$ wzorem: $F_1(x) = 1 - \left(\sqrt{3}\right)^{-x}$
- X_2 ma rozkład ujemny dwumianowy dany wzorem:
  $\Pr(N = k) = \binom{k+2}{k} \cdot (1/3)^3 (2/3)^k$,
  (*Rozkład zmiennej* X_2 *można też traktować jako złożony rozkład Poissona*)

Wiadomo, że zmienna losowa $W = X_1 + X_2$ ma także złożony rozkład Poissona, a więc można ją reprezentować jako losową sumę:

- $W = Z_1 + \ldots + Z_M$,

gdzie M ma rozkład Poissona z parametrem λ_M, zaś rozkład pojedynczego składnika Z dany jest dystrybuantą F_Z. Aby reprezentacja tego rozkładu za pomocą pary parametrów (λ_M, F_Z) była jednoznaczna, przyjmiemy że λ_M jest parametrem częstotliwości niezerowych szkód, a co za tym idzie $F_Z(0) = 0$.

Wartość $F_Z(2)$, czyli $\Pr(Z \leq 2)$, w przybliżeniu wynosi:

(A) $F_Z(2) \approx 0.630$

(B) $F_Z(2) \approx 0.667$

(C) $F_Z(2) \approx 0.703$

(D) $F_Z(2) \approx 0.739$

(E) $F_Z(2) \approx 0.776$

Zadanie 6. Zmienna losowa:

$X = Y_1 + \ldots + Y_N$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze intensywności $\lambda = E(N) = 1/2$. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika *Y*. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,\ldots,4$ prawdopodobieństwa $\Pr(X = k)$.

k	$\Pr(Y = k)$	$\Pr(X = k)$
0	0	0,60653
1	0,1	0,03033
2	0,4	0,12206
3	0,1	0,03640
4	0,1	0,04413
5	0,3	

$\Pr(X = 5)$ wynosi (w przybliżeniu do trzeciego miejsca dziesiętnego):

(A) 0.087

(B) 0.091

(C) 0.095

(D) 0.099

(E) 0.103

Zadanie 7. W pewnym portfelu ryzyk łączna wartość szkód:

$S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 10$ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody *Y* wykładniczym z wartością oczekiwaną $E(Y) = 10$.

Niech:

$Y_{M,i} = \min\{Y_i, M\}$; $\quad i = 1,2,...,N$, oraz niech:

$S_M = Y_{M,1} + ... + Y_{M,N}$,

gdzie S_M oznacza tę część łącznej wartości szkód *S*, która pozostaje na udziale ubezpieczyciela (po scedowaniu nadwyżki każdej szkody z tego portfela ponad *M* na reasekuratora). Aktualnie parametrem kontraktu reasekuracyjnego jest wartość zachowku $M = 45$. Rozważamy jednak możliwość zmiany tego parametru, oraz wpływ takiej zmiany na charakterystyki zmiennej losowej S_M.

Pochodna wariancji zmiennej S_M:

$$\left.\frac{\partial VAR(S_M)}{\partial M}\right|_{M=45}$$

wynosi (w przybliżeniu do jednej dziesiątej):

(A) 8.0

(B) 8.5

(C) 9.0

(D) 9.5

(E) 10.0

Zadanie 8. Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$

gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o identycznym rozkładzie, gdzie nadwyżka początkowa u jest nieujemna, składka c jest większa od wartości oczekiwanej μ przyrostu szkód W_i, a wariancja σ^2 oraz moment centralny trzeciego rzędu μ_3 przyrostu szkód W_i są dodatnie ale skończone.

Rozważmy funkcję:

- $\Psi_{dV}\left(u, \quad c, \quad E(W_i), \quad VAR(W_i), \quad \mu_3(W_i)\right)$

przypisującą procesowi nadwyżki spełniającemu ww. założenia prawdopodobieństwo ruiny aproksymowane **metodą deVyldera**.

Oznaczmy przez:

- $\Psi_{A,dV}$ wartość tak uzyskanej aproksymacji dla procesu nadwyżki ubezpieczyciela A o parametrach $\left(u, c, \mu, \sigma^2, \mu_3\right) = (6, 4, 3, 4, 2)$,
- $\Psi_{B,dV}$ wartość tak uzyskanej aproksymacji dla procesu nadwyżki ubezpieczyciela B o parametrach $\left(u, c, \mu, \sigma^2, \mu_3\right) = (12, 8, 6, 8, 4)$
- $\Psi_{A+B,dV}$ wartość tak uzyskanej aproksymacji dla procesu nadwyżki ubezpieczyciela, który powstanie po połączeniu portfeli i nadwyżek początkowych ubezpieczycieli A i B, o parametrach $\left(u, c, \mu, \sigma^2, \mu_3\right) = (18, 12, 9, 12, 6)$,

Zachodzi równość $\Psi_{A+B,dV} = a \cdot \Psi_{A,dV} \cdot \Psi_{B,dV}$.

Stała a wynosi:

(A) $a = 8/9$

(B) $a = 1$

(C) $a = 13/12$

(D) $a = 9/8$

(E) $a = 5/4$

*Uwaga: **metoda de Vyldera** polega na tym, iż Ψ_{dV} wyznaczamy jako dokładne prawdopodobieństwo ruiny dla procesu aproksymującego $U_{dV}(t)$, w którym szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, ich rozkład jest wykładniczy (β_{dV}), zaś parametry procesu aproksymującego $(\theta_{dV}, \lambda_{dV}, \beta_{dV})$ są tak dobrane, aby przyrosty procesu aproksymującego i przyrosty procesu aproksymowanego miały takie same momenty trzech pierwszych rzędów.*

Zadanie 9. Rozważmy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o jednakowym rozkładzie. Rozkład przyrostów W_i jest rozkładem wykładniczym o wartości oczekiwanej równej 1/2. Dobierz składkę c tak, aby współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*) R wyniósł jeden.
Funkcja prawdopodobieństwa ruiny będzie wtedy postaci:
$\Psi(u) = a \cdot \exp(-u)$.
Stała a wynosi:

(A) $\ln 2$

(B) $\frac{1}{2\ln 2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

(E) $\frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 10. Niech T będzie czasem likwidacji szkody, mierzonym w taki sposób, że $T = 0$ gdy szkodę zlikwidowano w ciągu tego samego roku, w którym do niej doszło, $T = 1$ jeśli w ciągu następnego roku, $T = 2$ jeśli jeszcze w następnym roku itd.
Rozkład zmiennej T jest rozkładem geometrycznym:

$$\Pr(T = k) = (1/2)^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,...$$

O rozkładzie wartości pojedynczej szkody wiemy, że:

$$E(Y/T) = 10 \cdot (11/10)^{T} \qquad T = 0,1,2,...$$

Ani T, ani Y nie zależą od tego, w którym roku kalendarzowym do szkody doszło.

Ponieważ w przeszłości dochodziło do tej samej liczby szkód w kolejnych latach, wobec tego na koniec roku t_0 rozkład ilości szkód, oczekujących na likwidację według czasu ich zajścia jest także geometryczny z ilorazem postępu ½ (połowa to szkody zaszłe w roku t_0, jedna czwarta to szkody zaszłe w roku $t_0 - 1$ itd.

Oczekiwana wartość szkody losowo dobranej ze zbioru szkód, które na koniec roku t_0 oczekują na likwidację, wynosi:

(A) 13.58

(B) 13.13

(C) 12.67

(D) 12.22

(E) 11.11

Egzamin dla Aktuariuszy z 25 stycznia 2003 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	B	
4	D	
5	E	
6	D	
7	E	
8	C	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.