Zadanie 1. W pewnym portfelu ryzyk ubezpieczycielowi udaje się rekompensować sobie jedną trzecią wartości pierwotnie wypłaconych odszkodowań w formie regresów. Oczywiście między zajściem szkody a wypłatą odszkodowania występuje opóźnienie, a także regresy występują z opóźnieniem w stosunku do wypłat odszkodowań.

- Rozkład opóźnienia od zajścia szkód do wypłaty odszkodowań dany jest współczynnikami:

$$w_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}(3/5)^3(2/5)^k, \qquad k = 0,1,2,...$$

gdzie w_k oznacza udział wypłat odszkodowań dokonanych w miesiącu $t+k$ ze szkód zaszłych w miesiącu *t* w całkowitej wartości odszkodowań za szkody zaszłe w miesiącu *t*.

- Rozkład opóźnienia od wypłat odszkodowań do regresów z tytułu tych wypłat dany jest współczynnikami:

$$r_k = (k+1)(3/5)^2(2/5)^k, \qquad k = 0,1,2,...$$

gdzie r_k oznacza udział regresów uzyskanych w miesiącu $\tau + k$ z tytułu odszkodowań wypłaconych w miesiącu τ w całkowitej wartości regresów z tytułu odszkodowań wypłaconych w miesiącu τ.

Rozkład opóźnienia regresów w stosunku do wypłaty odszkodowań jest taki sam bez względu na to jak odszkodowanie było opóźnione w stosunku do zajścia szkody.

Niech net_k dla $k = 0,1,2,...$ oznacza wypłaty netto (odszkodowania minus regresy) dokonane w miesiącu $t+k$ z tytułu szkód zaszłych w miesiącu *t*, podzielone przez całkowitą wartość odszkodowań za szkody zaszłe w tym miesiącu. Oczywiście zachodzi: $\sum_{k=0}^{\infty} net_k = \frac{2}{3}$.

Liczba całkowita nieujemna *K* taka, że:

- $net_K > 0$ oraz $net_{K+1} < 0$,

wynosi:

(A) $K = 5$

(B) $K = 6$

(C) $K = 7$

(D) $K = 8$

(E) taka liczba nie istnieje

Zadanie 2. W pewnym ubezpieczeniu mają nastąpić duże zmiany relacji cen: stawki odszkodowań za szkody osobowe wzrosną, podczas gdy ceny w jakich wyrażają się szkody rzeczowe pozostaną na dotychczasowym poziomie.
Przed zmianą relacji cen obserwowano następujące prawidłowości:

- rozkład opóźnienia wypłat odszkodowań dany był współczynnikami:

$$w_k = \frac{5^k}{k!}\exp(-5) \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

gdzie w_k oznacza udział łącznej wartości odszkodowań wypłacanych w miesiącu $t+k$ ze szkód zaszłych w miesiącu t w całkowitej wartości odszkodowań za szkody z miesiąca t, a w tym:

- $(9/10)^k\, w_k$ wynosił udział wartości odszkodowań za szkody rzeczowe,
- $\left(1-(9/10)^k\right)w_k$ wynosił udział wartości odszkodowań za szkody osobowe;

(w obu przypadkach chodzi o udział w całkowitej wartości odszkodowań za szkody z miesiąca t).

Oczywiście przed zmianą cen średnie opóźnienie wynosiło $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot w_k = 5$.

Średnie opóźnienie po zmianie rozkładu spowodowanej dwukrotnym wzrostem stawek odszkodowań za szkody osobowe wyniesie (z dobrym przybliżeniem):

(A) 5.09

(B) 5.22

(C) 5.37

(D) 5.56

(E) 5.77

Zadanie 3. Zmienna losowa X przyjmuje wartości nieujemne – tzn. $\Pr(X < 0) = 0$. Dla dwóch punktów d_1 i d_2 takich, że $0 < d_1 < d_2$ znamy wartości dystrybuanty $F_X(d_i)$:

i	d_i	$F_X(d_i)$
1	3	0.50
2	10	0.80

Wiemy też:
że wartość oczekiwana nadwyżki zmiennej X ponad 3 wynosi 10:
$E[(X-3)_+] = 10$,
oraz że warunkowa wartość oczekiwana zmiennej X na przedziale $(3, 10]$ wynosi 5:
$E(X/X \in (3, 10]) = 5$

Wobec tego wartość oczekiwana nadwyżki zmiennej X ponad 10 wynosi:

(A) 7.1

(B) 7.3

(C) 7.5

(D) 7.7

(E) 8.0

Zadanie 4. Łączna wartość szkód w pewnym portfelu ryzyk:

- $S = Y_1 + \ldots + Y_N$,

ma złożony rozkład Poissona o wykładniczym rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y o wartości oczekiwanej $E(Y) = \frac{1}{\beta}$.

Rozważmy podział ryzyka pomiędzy ubezpieczyciela i reasekuratora. Parametrem tego podziału jest nieujemna liczba d. Reasekurator pokrywa łączną wartość nadwyżek każdej ze szkód ponad wartość d:

- $S_R(d) = (Y_1 - d)_+ + \ldots + (Y_N - d)_+$,

zaś na udziale ubezpieczyciela pozostaje zmienna $S_U(d) = S - S_R(d)$, a więc:

- $S_U(d) = \min\{Y_1, d\} + \ldots + \min\{Y_N, d\}$.

Przyjmijmy oznaczenie:

- $h(d) = \dfrac{VAR(S_U(d)) + VAR(S_R(d))}{VAR(S)}$

Niech d^* będzie taką wartością parametru podziału ryzyka, przy której funkcja $h(d)$ osiąga wartość minimalną.

$h(d^*)$ wynosi:

(A) $1 - \exp(-1)$

(B) $1 - 2\exp(-1)$

(C) $1 - \frac{1}{2}\exp(-1)$

(D) $1 - 2\exp(-2)$

(E) $1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 5. W pewnej (niejednorodnej) populacji ryzyk łączna wartość szkód X z jednego ryzyka
ma warunkowo (przy danej wartości λ parametru Λ) złożony rozkład Poissona. Dokładniej, $X = Y_1 + ... + Y_N$ jest sumą pierwszych N wyrazów ciągu niezależnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ o tym samym rozkładzie (przyjmujemy $X = 0$ gdy $N = 0$), niezależnych także od zmiennej N.
Zależność rozkładu zmiennej X od parametru ryzyka Λ jest taka, że:

- $E(N/\Lambda = \lambda) = \lambda$, $E(Y_n/\Lambda = \lambda) = (1+\lambda)\mu$ dla $n = 1,2,3,...$

Bezwarunkowy rozkład parametru Λ w populacji ryzyk dany jest rozkładem gamma:

- $f_\Lambda(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \cdot \exp(-\beta\lambda)$,
- o parametrach: $\alpha = 3$, $\beta = 15$

Iloraz warunkowych wartości oczekiwanych:

- $\dfrac{E(Y_1/N = 3)}{E(Y_1/N = 1)}$

wynosi:

(A) $\dfrac{10}{9}$

(B) $\dfrac{21}{19}$

(C) $\dfrac{23}{21}$

(D) $\dfrac{12}{11}$

(E) $\dfrac{11}{10}$

Interpretacja: w miarę wzrostu liczebności próbki obserwacji statystycznych z tej populacji średnia wartość szkody z tych polis, które wygenerowały dokładnie k szkód, dążyć będzie do wartości $E(Y_1/N = k)$.

Zadanie 6. Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona, a więc ilość szkód $N(t)$ na odcinku czasu $(0, t]$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λt. Wartości kolejno pojawiających się szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i niezależnymi od przebiegu procesu $N(t)$, o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$.

Ubezpieczyciel wystawia polisę na to ryzyko na okres czasu $(0, 1]$ z limitem odpowiedzialności równym jeden. Realizowane jest to w taki sposób, iż jeśli przez $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ oznaczymy wartości odszkodowań wypłacanych za kolejne szkody, to:

- $Z_1 = Y_1$ (o ile oczywiście do co najmniej jednej szkody w ciągu roku dojdzie, czyli $N(1) \geq 1$)
- $Z_2 = \min\{Y_2, \ \ 1 - Z_1\}$ (o ile $N(1) \geq 2$)
- $Z_3 = \min\{Y_3, \ \ 1 - Z_1 - Z_2\}$ (o ile $N(1) \geq 3$)
- $Z_4 = \min\{Y_4, \ \ 1 - Z_1 - Z_2 - Z_3\}$ (o ile $N(1) \geq 4$)
- itd.

Oblicz wartość oczekiwaną odszkodowania za drugą z kolei szkodę (warunkową, pod warunkiem że do drugiej szkody dojdzie)

(A) $E(Z_2 / N(1) \geq 2) = \frac{1}{4}$

(B) $E(Z_2 / N(1) \geq 2) = \frac{7}{24}$

(C) $E(Z_2 / N(1) \geq 2) = \frac{1}{3}$

(D) $E(Z_2 / N(1) \geq 2) = \frac{3}{8}$

(E) $E(Z_2 / N(1) \geq 2) = \frac{5}{12}$

Zadanie 7. W pewnej populacji ryzyk z jednego ryzyka może wystąpić w ciągu roku co najwyżej jedna szkoda, a wartość każdej szkody wynosi jeden.
Na populację składają się „ryzyka uczciwe” oraz „oszuści”, których niestety *ex ante* nie odróżniamy.

Prawdopodobieństwo wylosowania „ryzyka uczciwego” wynosi $\Pr(U) = \frac{19}{20}$, zaś na „oszusta” $\Pr(O) = \frac{1}{20}$.

- „Ryzyko uczciwe” generuje szkodę z prawdopodobieństwem $\Pr(N = 1/U) = \frac{1}{10}$, jeśli zaś już szkoda wystąpi, to moment jej wystąpienia T ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$ (*jednostką pomiaru czasu jest rok*)
- „Oszust” generuje szkodę z prawdopodobieństwem jeden, a moment jej wystąpienia ma na przedziale $(0, 1)$ rozkład dany gęstością: $f_{T/O}(t) = 2(1 - t)$.

Znajdź taką wartość $s \in (0, 1)$, dla której zachodzi:

$$\Pr(O/(N = 1) \wedge T \leq s) = \frac{1}{2}$$

(A) $s = \frac{1}{9}$

(B) $s = \frac{1}{10}$

(C) $s = \frac{1}{19}$

(D) $s = \frac{2}{19}$

(E) $s = \frac{1}{20}$

Zadanie 8. Wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład Pareto dany gęstością:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{20000}{(100+y)^3} & dla \quad y \geq 0 \\ 0 & dla \quad y < 0 \end{cases}$$

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela $U(t)$ w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi c. Niech $T = \inf\{t: \quad t \geq 0, U(t) < 0\}$ oznacza moment czasu, w którym dochodzi do ruiny (przyjmujemy $T = \infty$ jeśli dla dowolnego $t \geq 0$ nadwyżka jest nieujemna). Przyjmujemy iż:

- nadwyżka początkowa jest zerowa
- $c = 1500$, $\lambda = 10$

Rozważmy funkcję:

$G(h) = \Pr((T < \infty) \wedge (U(T) < -h)), \quad h \geq 0,$

która określa prawdopodobieństwo zdarzenia, iż do ruiny dojdzie, i że deficyt w momencie ruiny przekroczy wartość h.

Niech h^* oznacza taką wartość h, dla której $G(h) = \dfrac{1}{6}$.

h^* wynosi:

(A) 200

(B) 300

(C) 400

(D) 500

(E) 600

Uwaga: dla prawdziwości twierdzenia, na którym należy oprzeć rozwiązanie zadania, wystarczy założenie iż $c > \lambda \cdot E(Y)$ (a więc w szczególności iż $E(Y) < \infty$), co w niektórych podręcznikach aktuarialnych (np. Actuarial Mathematics, Bowers et al.) nie jest wyraźnie zaznaczone

Zadanie 9. Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$

gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o jednakowym rozkładzie. Rozkład przyrostów W_i jest rozkładem Gamma o wartości oczekiwanej równej jedności i wariancji równej jednej czwartej. Składka wynosi $c = \ln\left(\frac{256}{81}\right)$.

Wartość współczynnika dopasowania (*adjustment coefficient*) dla tego procesu wynosi:

(A) $R = 1$

(B) $R = 1\frac{1}{4}$

(C) $R = 1\frac{1}{2}$

(D) $R = 1\frac{3}{4}$

(E) $R = 2$

Zadanie 10. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela charakteryzują parametry:
- λ - intensywność (roczna) Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód,
- u - nadwyżka początkowa,
- rozkład zmiennej Y - wartości pojedynczej szkody,
- θ - stosunkowy narzut na składkę netto.

Załóżmy, że zmienna Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, M)$, gdzie $M > 0$.
Załóżmy także, że $u = 5 \cdot M$.
Przyjmijmy wreszcie, że nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa: $\exp(-R \cdot u) = \exp\left(-\frac{5}{2}\right)$, gdzie R to współczynnik dopasowania (*adjustment coefficient*). Oblicz θ.

(A) $\theta = 6\sqrt{e} - 9$

(B) $\theta = 6\sqrt{e} - 10$

(C) $\theta = 6\sqrt{e} - 8$

(D) $\theta = 8\sqrt{e} - 9$

(E) $\theta = 8\sqrt{e} - 13$

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 października 2002 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	B	
3	E	
4	A	
5	E	
6	C	
7	B	
8	B	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.