Zadanie 1

Niech A i B będą zdarzeniami losowymi, A' i B' oznaczają zdarzenia przeciwne. Wiadomo, że

$$\Pr(B' \mid A) = \alpha, \quad \Pr(B \mid A') = \beta, \qquad \Pr(A) = \Pr(B) = p.$$

Oblicz p, wiedząc, że $\alpha = 1/2$ i $\beta = 1/3$.

(A) $p = \frac{2}{5}$

(B) $p = \frac{1}{3}$

(C) $p = \frac{1}{2}$

(D) $p = \frac{1}{5}$

(E) $p = \frac{1}{6}$

Zadanie 2

W urnie znajduje się $r = 25$ kul, z których $m = 15$ jest białych i $r - m = 10$ czarnych. Losujemy *bez zwracania* najpierw $n_1 = 6$ kul, a następnie spośród kul *pozostałych* w urnie, losujemy *bez zwracania* $n_2 = 8$ kul. Niech

- S_1 oznacza liczbę białych kul wybranych w pierwszym losowaniu,
- S_2 oznacza liczbę białych kul wybranych w drugim losowaniu.

Oblicz $Cov(S_1, S_2)$.

(A) $Cov(S_1, S_2) = 0.48$

(B) $Cov(S_1, S_2) = -0.32$

(C) $Cov(S_1, S_2) = -n_1 n_2 \dfrac{m(r-m)}{r^2(r-1)} = -0.48$

(D) $Cov(S_1, S_2) = -0.75$

(E) $Cov(S_1, S_2) = -1$

Zadanie 3

Załóżmy, że $X_1,...,X_n,...$ są dodatnimi, niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym, ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech

$$R_0 = 0 \quad \text{i} \quad R_n = \max(X_1,....,X_n) \text{ dla } n > 0.$$

Zmienne losowe N i M są niezależne od siebie nawzajem i od $X_1,...,X_n,...$. Wiadomo, że obie te zmienne mają rozkład Poissona, $E(N) = \lambda$ i $E(M) = \mu$.

Oblicz $\Pr(R_{N+M} > R_N)$.

(A) $\Pr(R_{N+M} > R_N) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}\left[1 - e^{-\mu}\right]$

(B) $\Pr(R_{N+M} > R_N) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu + 1}$

(C) $\Pr(R_{N+M} > R_N) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$

(D) $\Pr(R_{N+M} > R_N) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}\left[1 - e^{-\lambda-\mu}\right]$

(E) podane założenia nie wystarczają do obliczenia rozważanego prawdopodobieństwa

Wskazówka: Zauważ, że (warunkowo, dla $N + M > 0$) maksimum ciągu $X_1,...,X_N,...,X_{N+M}$ jest osiągane tylko dla jednego wyrazu tego ciągu. Pamiętaj, że dla $N + M = 0$ mamy $R_{M+N} = R_N$.

Zadanie 4

Załóżmy, że zmienne losowe $X_1,...,X_n,...$ są niezależne, mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, $E(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$. Niech N będzie zmienną losową niezależną od ciągu $X_1,...,X_n,...$, o rozkładzie prawdopodobieństwa danym następującym wzorem:

$$\Pr(N=n)=n(1-\theta)^{n-1}\theta^2, \text{ dla } n=1,2,.....$$

Niech $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Oblicz $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)$.

(A) $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)=\theta(\sigma^2+\mu^2)$

(B) $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)=\theta\sigma^2$

(C) $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)=\frac{\sigma^2}{\theta}$

(D) $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)=\frac{\sigma^2}{1-\theta}$

(E) $Var\left(\frac{S_N}{N}\right)=\theta\sigma^2+\mu^2$

Zadanie 5

Załóżmy, że $W_1, W_2, ..., W_n, ...$ jest ciągiem zmiennych losowych takim, że

- zmienna W_1 ma gęstość wykładniczą: dla $w_1 > 0$

$$f(w_1) = \lambda \ \exp(-\lambda \ w_1);$$

- warunkowo, dla danych $W_1, W_2, ..., W_n$, zmienna W_{n+1} ma gęstość wykładniczą: dla $w_{n+1} > 0$

$$f(w_{n+1} \mid w_1, ..., w_n) = \begin{cases} \lambda \ \exp(-\lambda \ w_{n+1}) & gdy \ \ w_n \le c; \\ \mu \ \exp(-\mu \ w_{n+1}) & gdy \ \ w_n > c;. \end{cases}$$

Niech $c = \ln 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$.

Podaj $\lim_{n\to\infty} E(W_n)$.

(A) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = 3/5$

(B) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = 4/5$

(C) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = e^{-1/5}$

(D) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = 2^{-1/5}$

(E) $\lim_{n\to\infty} E(W_n) = 3/4$

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1,...,X_n$ i $Y_1,...,Y_m$ są dwiema niezależnymi próbkami z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$. Niech

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ będzie średnią z pierwszej próbki;

$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ będzie średnią z drugiej próbki.

Oblicz $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|)$, jeśli $n = 100$ i $m = 385$ (z dokładnością do 0.01).

.

.

(A) $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|) = 0.74$

(B) $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|) = 0.94$

(C) $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|) = 0.66$

(D) $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|) = 0.80$

(E) $\Pr(|\overline{X}-\mu| > |\overline{Y}-\mu|) = 0.70$

Zadanie 7

Niech $W_1, W_2, ..., W_n$ będzie próbką z rozkładu wykładniczego o gęstości określonej dla $w > 0$ wzorem:

$$f(w) = \lambda \ \exp(-\lambda \ w).$$

Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych W_i, tylko wartości *zaokrąglone w górę* do najbliższej liczby całkowitej. Innymi słowy, dane są wartości zmiennych losowych $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, gdzie

$$Z_i = \lceil W_i \rceil.$$

(symbol $\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że $a \le k$).

Oblicz estymator *największej wiarogodności* $\hat{\lambda}$ nieznanego parametru λ oparty na obserwacjach $Z_1, Z_2, ..., Z_n$.

(A) $\hat{\lambda} = \ln\left(\frac{S}{n} - 1\right)$, gdzie $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{n}{S}$, gdzie $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

(C) $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil$, gdzie $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

(D) $\hat{\lambda} = \left\lceil \frac{n}{S} \right\rceil - 1$, gdzie $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

(E) $\hat{\lambda} = -\ln\left(1 - \frac{n}{S}\right)$, gdzie $S = \sum_{i=1}^{n} Z_i$

Zadanie 8

Próbka $X_1, X_2, ..., X_{14}$ pochodzi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i nieznaną wariancją σ^2. Na podstawie tej próbki zbudowano w standardowy sposób przedział ufności na poziomie $1-\alpha = 0.995$ dla μ:

$$\left[\overline{X}_{14} - S \cdot t / \sqrt{14}\ ,\ \overline{X}_{14} + S \cdot t / \sqrt{14}\right].$$

Niech X_{15} będzie zmienną losową pochodzącą z tego samego rozkładu, niezależną od $X_1, X_2, ..., X_{14}$.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że X_{15}, należy do obliczonego uprzednio przedziału ufności:

$$p = \Pr\left(\overline{X}_{14} - S \cdot t / \sqrt{14} \le X_{15} \le \overline{X}_{14} + S \cdot t / \sqrt{14}\right)$$

(z dokładnością do 0.01).

(A) $p = 0.99$

(B) $p = 0.95$

(C) $p = 0.60$

(D) $p = 0.40$

(E) $p = 0.85$

Zadanie 9

Obserwujemy parę (X,Y) zmiennych losowych. Zakładamy, że są to zmienne niezależne, X ma rozkład normalny $N(\mu_X,1)$ i Y ma rozkład normalny $N(\mu_Y,1/3)$ (*w nawiasie podane są wariancje, a nie odchylenia standardowe*).

Rozważmy najmocniejszy test hipotezy $H_0:(\mu_X,\mu_Y)=(0,0)$ przeciwko alternatywie $H_1:(\mu_X,\mu_Y)=(1,1)$ na poziomie istotności $\alpha=0.1$.

Wyznacz moc tego testu.

(A) moc $=0.83$

(B) moc $=0.48$

(C) moc $=0.97$

(D) moc $=0.91$

(E) moc $=0.76$

Zadanie 10

Załóżmy, że dla danej wartości $\Theta = \theta$, zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ są warunkowo niezależne i mają dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa:

$$\Pr(X_i = 1 \mid \theta) = \theta, \qquad \Pr(X_i = 0 \mid \theta) = 1 - \theta.$$

Zmienna losowa Θ ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$ o gęstości

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 1 & dla \quad 0 < \theta < 1; \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku. \end{cases}$$

Niech

$$N = \min\{n : X_n = 1\}.$$

Oblicz $\Pr(N = n+1 \mid N > n)$ dla $n = 0,1,2,\ldots$

(A) $\Pr(N = n+1 \mid N > n) = \dfrac{n}{n+2}$

(B) $\Pr(N = n+1 \mid N > n) = \dfrac{1}{n+1}$

(C) $\Pr(N = n+1 \mid N > n) = \dfrac{1}{n+2}$

(D) $\Pr(N = n+1 \mid N > n) = \dfrac{1}{2}$

(E) $\Pr(N = n+1 \mid N > n) = \dfrac{1}{2(n+1)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 15 czerwca 2002 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	D	
4	B	
5	B	
6	E	
7	E	
8	C	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.