Zadanie 1

Talia kart składa się z 16 figur i 36 blotek. Dobrze potasowane karty rozdajemy czterem graczom, każdemu po 13. Jakie jest prawdopodobieństwo p, że każdy z graczy otrzyma 4 figury i 9 blotek?

(A) $$p = \frac{\binom{13}{4}^4}{\binom{52}{16}}$$

(B) $$p = \frac{\binom{16}{4}^4}{\binom{52}{13}}$$

(C) $$p = \frac{\binom{13}{4}\binom{9}{4}\binom{5}{4}}{\binom{52}{16}\binom{36}{16}\binom{20}{16}}$$

(D) $$p = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{16^4}$$

(E) $$p = \frac{1}{\binom{13}{4}^4}$$

Zadanie 2

W urnie znajdują się kule, z których każda jest oznaczona jedną z liter alfabetu:

- 10 kul oznaczonych literą A,
- 20 kul oznaczonych literą B,
- 30 kul oznaczonych literą C,
- x kul oznaczonych innymi literami alfabetu.

Losujemy *ze zwracaniem* 7 razy po jednej kuli z urny. Zmienne losowe N_A, N_B, N_C oznaczają, odpowiednio, liczbę tych ciągnień, w których pojawiła się litera A,B,C.

Jakie musi być x, aby zmienne losowe $N_A + N_B$ oraz $N_B + N_C$ były *nieskorelowane* ?

(A) $x = 25$

(B) $x = 20$

(C) $x = 15$

(D) $x = 10$

(E) $x = 50$

Zadanie 3

Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$, zaś N jest zmienną o rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ, niezależną od $X_1,\ldots,X_n,\ldots$. Niech

$$M = \begin{cases} \max(X_1,\ldots,X_N) & gdy \quad N > 0; \\ 0 \quad gdy & N = 0. \end{cases}$$

Oblicz $E(M)$.

(A) $E(M) = \lambda\ e^{-\lambda}$

(B) $E(M) = \dfrac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}$

(C) $E(M) = \dfrac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}}$

(D) $E(M) = 1 - \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

(E) $E(M) = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

Zadanie 4

Zmienne losowe $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ i $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ są niezależne. Każda ze zmiennych I_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa: $\Pr(I_i = 1) = p$, $\Pr(I_i = 0) = 1 - p = q$. Każda ze zmiennych X_i ma jednakowy rozkład prawdopodobieństwa taki, że $E(X_i) = \mu$ i $Var(X_i) = \sigma^2$. Niech

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i, \quad K_n = \sum_{i=1}^{n} I_i .$$

Zbadaj zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}}$ przy $n \to \infty$.

(A) $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}} \to N(0, \sigma^2)$

(B) $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}} \to N(0, p\sigma^2)$

(C) $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}} \to N(0, p\sigma^2 + pq\mu^2)$

(D) $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}}$ nie jest ciągiem zbieżnym do rozkładu normalnego

(E) $\frac{S_n - K_n \mu}{\sqrt{n}} \to N(0, p\sigma^2 + q\mu^2)$

Zadanie 5

Załóżmy, że W_1, W_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, $E(W_n) = 1/\lambda$ dla $n = 1,2$. Niech $X = \min(W_1, W_2)$.

Oblicz $E(W_1 | X)$.

(A) $E(W_1 | X) = X + \dfrac{1}{\lambda}$

(B) $E(W_1 | X) = X + \dfrac{1}{2\lambda}$

(C) $E(W_1 | X) = \dfrac{X + 1/\lambda}{2}$

(D) $E(W_1 | X) = \dfrac{1}{\lambda}$

(E) $E(W_1 | X) = \min(X, 1/\lambda)$

Wskazówka: Zauważ, że z prawdopodobieństwem ½ mamy $W_1 = X$.

Zadanie 6

Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_m,X_{m+1},\ldots,X_n$ jest próbką z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$. Niech

$\overline{X}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$ będzie średnią z pierwszej części próbki;

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ będzie średnią z całej próbki.

Oblicz

$$r = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X}_m)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}\right].$$

(A) $r = \frac{m}{n}$

(B) $r = \frac{m-1}{n-2}$

(C) $r = \frac{m}{n-1}$

(D) $r = \frac{m-1}{n-1}$

(E) $r = \frac{m-1}{n}$

Zadanie 7

Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\ e^{-\lambda x} & dla\ \ x \geq 0; \\ 0 \quad dla\ x < 0. \end{cases}$$

Parametr $\lambda > 0$ jest nieznany. Niech $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Znajdź taką liczbę c, żeby $c(\overline{X})^2$ był *nieobciążonym* estymatorem wariancji pojedynczej zmiennej X_i.

(A) $c = \frac{n+1}{n}$

(B) $c = \frac{n-1}{n}$

(C) $c = 1$

(D) Nie istnieje taka liczba c

(E) $c = \frac{n}{n+1}$

Zadanie 8

Każda ze zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_{100}$ ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i *znaną* wariancją σ^2. Założono, że zmienne są niezależne i zbudowano w standardowy sposób przedział ufności na poziomie $1 - \alpha = 0.95$ dla μ:

$$\left[\overline{X} - 1.96\sigma/10\ ,\ \overline{X} + 1.96\sigma/10\right].$$

W rzeczywistości, zmienne $X_1, X_2, ..., X_{100}$ mają łączny rozkład normalny, ale są skorelowane, $Corr(X_i, X_j) = 1/10$ dla wszystkich $i \neq j$.

Oblicz faktyczny poziom ufności, czyli

$$c = \Pr\left(\overline{X} - 1.96\sigma/10 \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\sigma/10\right).$$

(z dokładnością do 0.01).

(A) $c = 0.99$

(B) $c = 0.97$

(C) $c = 0.45$

(D) $c = 0.90$

(E) $c = 0.85$

Zadanie 9

Niech X będzie pojedynczą obserwacją z rozkładu prawdopodobieństwa Pareto o dystrybuancie

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + x} & dla \;\; x \geq 0; \\ \\ 0 \quad dla \; x < 0. \end{cases}$$

Rozważmy test najmocniejszy hipotezy $H_0 : \lambda = 1$ przeciwko alternatywie $H_1 : \lambda = 101$ na poziomie istotności $\alpha = 0.01$.

Wyznacz moc tego testu.

(A) moc $= 0.805$

(B) moc $= 0.005$

(C) moc $= 0.020$

(D) moc $= 0.915$

(E) moc $= 0.505$

Zadanie 10

Rozważmy łańcuch Markowa $X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots$ o trzech stanach: „1” , „2” i „3’’ który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

(oczywiście, element P_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$). Załóżmy ponadto, że $\Pr(X_0 = 1) = 1/6$, $\Pr(X_0 = 2) = 1/3$ i $\Pr(X_0 = 3) = 1/2$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2).$$

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2) = 2/5$

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2) = 1/6$

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2) = 13/36$

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2)$ nie istnieje

(E) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_1 = 1 \mid X_n = 2) = 1/3$

XXV Egzamin dla Aktuariuszy z 13 kwietnia 2002 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	D	
4	B	
5	B	
6	D	
7	E	
8	C	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.