Zadanie 1.
Niech T będzie czasem likwidacji szkody, mierzonym w taki sposób, że $T = 0$ gdy szkodę zlikwidowano w ciągu tego samego roku, w którym do niej doszło, $T = 1$ jeśli w ciągu następnego roku, $T = 2$ jeśli jeszcze w następnym roku itd. W tabeli poniżej podany jest rozkład zmiennej T (taki sam bez względu na to, w którym roku do szkody doszło).

j	0	1	2	3	4
$\Pr(T = j)$	0.1	0.4	0.25	0.15	0.1

Niech n_t oznacza ilość szkód, które zaszły w ciągu roku t. Mamy dane na ten temat z roku t_0 oraz kilku lat poprzednich:

t	t_0	$t_0 - 1$	$t_0 - 2$	$t_0 - 3$	$t_0 - 4$
n_t	640	532	468	410	297

Oznaczmy przez A zdarzenie, iż szkoda, wylosowana ze zbioru szkód do których doszło w latach od $t_0 - 4$ do t_0 włącznie, na koniec roku t_0 oczekuje jeszcze na likwidację.

Warunkowa wartość oczekiwana $E(T/A)$ wynosi:

(A) 1.75

(B) 2.12

(C) 2.40

(D) 2.75

(E) 3.15

Zadanie 2.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o rozkładzie wykładniczym, danym na półosi dodatniej gęstością:
$$f_W(x) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right),$$
zaś nadwyżka początkowa $u = 2$
i składka za okres czasu wynosi $c = 2$

Prawdopodobieństwo, iż do ruiny dojdzie w ciągu dwóch pierwszych okresów, a więc iż zajdzie zdarzenie: $\{U_1 < 0 \quad \text{lub} \quad U_2 < 0\}$, wynosi (w przybliżeniu do trzeciego miejsca dziesiętnego):

(A) 0.199

(B) 0.235

(C) 0.271

(D) 0.334

(E) 0.370

Zadanie 3.
Zmienna losowa:
$S = Y_1 + ... + Y_N$

ma złożony rozkład Poissona o parametrze intensywności $\lambda = E(N) = \frac{1}{4}$. W tabeli poniżej podano rozkład prawdopodobieństwa składnika *Y*. W tejże tabeli podano także obliczone dla $k = 0,1,...,5$ prawdopodobieństwa $\Pr(S = k)$.

k	$\Pr(Y = k)$	$\Pr(S = k)$
0	0	0,778801
1	0,1	0,019470
2	0,3	0,058653
3	0,2	0,040402
4	0,1	0,022652
5	0,1	0,022944
6	0,2	

$\Pr(S = 6)$ wynosi (w przybliżeniu do trzeciego miejsca dziesiętnego):

(A) 0.040

(B) 0.041

(C) 0.042

(D) 0.043

(E) 0.044

Zadanie 4.
Rozkład wartości szkody Y określony na dodatniej półosi i posiadający skończoną wartość oczekiwaną dany jest dystrybuantą F. Dla dwóch punktów d_1 i d_2 znamy wartości dystrybuanty oraz wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad udział własny d_i:

i	d_i	$F(d_i)$	$E[(Y - d_i)_+]$
1	1	0.48	0.64
2	3	0.88	0.16

Warunkowa przedziałowa wartość oczekiwana zmiennej Y:
$E(Y/Y \in (d_1, d_2])$
wynosi:

(A) 1.20

(B) 1.24

(C) 1.48

(D) 1.60

(E) 2.20

Uwaga: podany przedział jest lewostronnie otwarty a prawostronnie domknięty, bo dystrybuanta rozumiana jest tutaj jako: $F(x) \doteq \Pr(Y \le x)$

Zadanie 5.
Wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 10)$.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela $U(t)$ w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi: $c = \frac{6}{5} \cdot \lambda \cdot E(Y)$.
Przyjmujemy iż nadwyżka początkowa jest zerowa.
Niech $T = \inf\{t: \quad t \geq 0, U(t) < 0\}$ oznacza moment czasu, w którym dochodzi do ruiny (przyjmujemy $T = \infty$ jeśli dla dowolnego $t \geq 0$ nadwyżka jest nieujemna).

Rozważmy funkcję:
$G(h) = \Pr((T < \infty) \wedge (U(T) < -h)), \quad h \geq 0$,
która określa prawdopodobieństwo zdarzenia, iż do ruiny dojdzie, i że deficyt w momencie ruiny przekroczy wartość *h*.
Niech h^* oznacza taką wartość *h*, dla której $G(h) = 0.3$.

h^* wynosi:

(A) $2\sqrt{3}$

(B) $\frac{9}{2}$

(C) $1 + 2\sqrt{3}$

(D) $\frac{10}{3}$

(E) 4

Zadanie 6.
Wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 10)$.
Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela $U(t)$ w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi:
$c = \frac{4}{3} \cdot \lambda \cdot E(Y)$.
Przyjmujemy iż nadwyżka początkowa wynosi $u = 10$.
Niech $T = \inf\{t: \quad t \geq 0, U(t) < 0\}$ oznacza moment czasu, w którym dochodzi do ruiny (przyjmujemy $T = \infty$ jeśli dla dowolnego $t \geq 0$ nadwyżka jest nieujemna).

Prawdopodobieństwo ruiny:
$\Psi = \Pr(T < \infty)$
przybliżamy metodą de Vyldera, otrzymując w rezultacie liczbę Ψ_{dV}.

Ψ_{dV} (w przybliżeniu do drugiego miejsca dziesiętnego) wynosi:

(A) $\Psi_{dV} \approx 0.29$

(B) $\Psi_{dV} \approx 0.36$

(C) $\Psi_{dV} \approx 0.45$

(D) $\Psi_{dV} \approx 0.74$

(E) nie da się wyznaczyć, bo brakuje informacji o wartości parametru λ

Uwaga: metoda de Vyldera polega na tym, iż Ψ_{dV} wyznaczamy jako dokładne prawdopodobieństwo ruiny dla procesu aproksymującego $U_{dV}(t)$, w którym szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, ich rozkład jest wykładniczy (β_{dV}), zaś parametry procesu aproksymującego $(c_{dV}, \lambda_{dV}, \beta_{dV})$ są tak dobrane, aby przyrosty procesu aproksymującego i przyrosty procesu aproksymowanego miały takie same momenty trzech pierwszych rzędów.

Zadanie 7.
W pewnym portfelu ryzyk łączna wartość szkód:
$S = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$
ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości λ oraz rozkładzie wartości pojedynczej szkody *Y* ciągłym, danym dystrybuantą *F*.
Niech:
$Y_{M,i} = \min\{Y_i, M\}; \quad i = 1,2,..., N$, oraz niech:
$S_M = Y_{M,1} + ... + Y_{M,N}$,
gdzie S_M oznacza tę część łącznej wartości szkód *S*, która pozostaje na udziale ubezpieczyciela (po scedowaniu nadwyżki każdej szkody z tego portfela ponad *M* na reasekuratora). Rozważamy możliwość zmiany poziomu zachowku *M* w kontrakcie reasekuracyjnym, i wpływ takiej zmiany na charakterystyki zmiennej losowej S_M.
Przy założeniu, że:
$\lambda = 10, \qquad M = 10, \qquad F(M) = 0.9$
pochodna momentu centralnego trzeciego rzędu tej zmiennej:
$$\frac{\partial}{\partial M} E\left[(S_M - E(S_M))^3\right]$$
wynosi:

(A) 300

(B) 900

(C) 2700

(D) 3000

(E) 9000

Zadanie 8.
Rozważmy dwie zmienne losowe o rozkładach złożonych:

$X = Y_1 + \ldots + Y_{N(X)}$,

$W = Y_1 + \ldots + Y_{N(W)}$.

W przypadku obu zmiennych rozkład pojedynczego składnika Y jest taki sam, a jego momenty wynoszą:

$E(Y) = 5$; $\quad E(Y^2) = 50$.

Zmienna $N(X)$ ma rozkład Poissona o wartości oczekiwanej równej $\exp(-2)$.
Zmienna $N(W)$ przy danej wartości λ parametru ryzyka Λ ma warunkowy rozkład Poissona o wartości oczekiwanej λ, zaś parametr ryzyka Λ ma rozkład logarytmiczno-normalny taki, że:

$\ln\Lambda \quad \sim$ Normalny(μ, σ^2),

gdzie $\mu = -2.18$,

zaś wartość parametru σ^2 jest tak dobrana, że zachodzi równość: $E(W) = E(X)$.

Stosunek wariancji $\dfrac{VAR(W)}{VAR(X)}$ wynosi (w przybliżeniu do drugiego miejsca dziesiętnego):

(A) 1.03

(B) 1.09

(C) 1.18

(D) 1.36

(E) 1.81

Zadanie 9.
Na podstawie znanej ilości szkód z okresów poprzednich N_0 przeprowadzamy predykcję łącznej wartości szkód:

$$S_1 = Y_1 + \ldots + Y_{N_1}$$

na okres następny dla pewnego ryzyka.

Ryzyko pochodzi z populacji, w której parametr ryzyka Λ ma rozkład Gamma (α, β)
(*przyjęto notację taką że* $E(\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$)

Ilości szkód N_0 i N_1 są warunkowo (przy danej wartości $\Lambda = \lambda$) niezależne, i mają rozkłady:

$$N_0 \sim \text{Poisson}(n \cdot \lambda)$$
$$N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Ten sam parametr ryzyka Λ różnicuje ryzyka z populacji ze względu na wartość szkód, bowiem zachodzi:

$$E(Y_i / \Lambda = \lambda) = \mu \cdot \lambda ,$$

Jeśli przyjmiemy:

$\alpha = 5$, $\beta = 20$, $n = 20$, $N = 10$;

to predyktor $E(S_1 / N_0)$ przyjmie wartość:

(A) $0.12 \cdot \mu$

(B) $0.13 \cdot \mu$

(C) $0.14 \cdot \mu$

(D) $0.15 \cdot \mu$

(E) $0.16 \cdot \mu$

Zadanie 10.
Niech X oznacza ryzyko związane z bezpośrednimi skutkami finansowymi pewnego wypadku ubezpieczeniowego, zaś Z ryzyko związane z jego pośrednimi konsekwencjami. Mamy następujące dane:
X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$
$\Pr(Z > 0 / X = x) = x$
Zmienna Z jest warunkowo (pod warunkiem że $Z > 0$) niezależna od zmiennej X, i ma pod tym warunkiem rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1.
(*interpretacja: prawdopodobieństwo wystąpienia pośrednich konsekwencji zależy od wartości X, natomiast jak już te konsekwencje wystąpią, to ich rozmiary nie zależą od wartości X*).

$VAR(X + Z)$ wynosi:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) 1

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{5}{3}$

(E) 2

Egzamin dla Aktuariuszy z 12 stycznia 2002 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi[*]

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja[♦]
1	C	
2	B	
3	C	
4	D	
5	E	
6	B	
7	A	
8	A	
9	D	
10	B	

[*] Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
[♦] Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.