Zadanie 1

A i B są zdarzeniami losowymi, A' i B' oznaczają zdarzenia przeciwne. Wiemy, że

$$\Pr(A \mid B) = \frac{1}{4} \quad \Pr(A' \mid B') = \frac{1}{3}$$
$$\Pr(B \mid A) = \frac{1}{5} \quad \Pr(B' \mid A') = \frac{2}{5}$$

Oblicz $p = \Pr(A \cup B \mid A' \cup B')$.

(A) $p = \frac{7}{9}$

(B) $p = \frac{1}{2}$

(C) $p = \frac{3}{5}$

(D) $p = \frac{5}{8}$

(E) $p = \frac{7}{8}$

Zadanie 2

Załóżmy, że zmienne losowe mają łączny rozkład normalny, $E(X)=E(Y)=0$, $Var(X)=Var(Y)=1$ i $Cov(X,Y)=\rho$. Oblicz $Cov(X^2,Y^2)$.

(A) $Cov(X^2,Y^2)=\rho^2$

(B) $Cov(X^2,Y^2)=2\rho^2$

(C) $Cov(X^2,Y^2)=3\rho^2$

(D) $Cov(X^2,Y^2)=|\rho|$

(E) $Cov(X^2,Y^2)=2\rho$

Zadanie 3

Rozważmy łańcuch Markowa $X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots$ o dwóch stanach: „1" i „2" który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

(oczywiście, element P_{ij} stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tej macierzy oznacza $\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$). Załóżmy ponadto, że $\Pr(X_0 = 1) = 1$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2).$$

(A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2) = 1/3$

(B) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2) = 5/9$

(C) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2) = 1/2$

(D) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2)$ nie istnieje

(E) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1 \mid X_{n+1} = 2) = 2/9$

Zadanie 4

Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_{\theta,\alpha}(x) = \begin{cases} (1/\alpha)\, e^{-(x-\theta)/\alpha} & dla \;\; x \geq \theta; \\ 0 \quad dla \;\; x < \theta. \end{cases}$$

Wyznaczono *estymatory największej wiarogodności* $(\hat{\theta},\hat{\alpha})$ parametrów (θ,α) w sytuacji, gdy oba parametry są nieznane ($\alpha > 0$).

Znajdź taką liczbę c, żeby $c\hat{\alpha}$ był *nieobciążonym* estymatorem parametru α.

(A) $c = \frac{n+1}{n}$

(B) $c = \frac{n-1}{n}$

(C) $c = 1$

(D) Nie istnieje taka liczba c

(E) $c = \frac{n}{n-1}$

Wskazówka: Wiadomo, że $\hat{\theta} = \min(X_1,...X_n)$.

Zadanie 5

Niech $N_1 = \sum_{i=1}^{N} X_i$ i $N_0 = N - N_1$, gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ, zaś $X_1, X_2, ... X_n, ...$ są zmiennymi losowymi niezależnymi od N i od siebie nawzajem. Zakładamy, że każda ze zmiennych X_i ma rozkład Bernoulli'ego: $\Pr(X_i = 1) = p$ i $\Pr(X_i = 0) = q$, gdzie $p + q = 1$, $0 < p < 1$. Oblicz

$$r = E\left[\frac{N_1}{N_0 + 1}\right].$$

(A) $r = \frac{p}{q}\left[1 - e^{-\lambda}\right]$

(B) $r = \frac{p}{q}$

(C) $r = \frac{p}{q+1}$

(D) $r = \frac{p}{q}\left[1 - e^{-\lambda q}\right]$

(E) $r = \frac{p}{q+1} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1}$

Zadanie 6

Załóżmy, że $W_1, W_2, ..., W_n, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym, $E(W_n) = 1/\lambda$. Niech $T_0 = 0$ i $T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ dla $n = 1,2,...$. Załóżmy, że Y jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, $E(Y) = 1/\alpha$ i Y jest niezależna od zmiennych W_i. Niech

$$N = \max\{n \geq 0 : T_n \leq Y\}.$$

Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej N.

(A) $\Pr(N = n) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,...$

(B) $\Pr(N = n) = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^n$ dla $n = 0,1,2,...$

(C) $\Pr(N = n) = e^{-\lambda/\alpha} \cdot \frac{(\lambda/\alpha)^n}{n!}$ dla $n = 0,1,2,...$

(D) $\Pr(N = n) = e^{-\alpha/\lambda} \cdot \frac{(\alpha/\lambda)^n}{n!}$ dla $n = 0,1,2,...$

(E) $\Pr(N = n) = e^{-\lambda/(\lambda+\alpha)} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha}\right)^n \frac{1}{n!}$ dla $n = 0,1,2,...$

Zadanie 7

Mamy 5 niezależnych próbek z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i *znaną* wariancją σ^2, przy tym każda z tych próbek ma tę samą liczebność n. Dla każdej z 5 próbek oddzielnie wyznaczamy w standardowy sposób przedział ufności. Niech

$$\left[\overline{X}_i - 1.15035\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \overline{X}_i + 1.15035\sigma/\sqrt{n}\right]$$

będzie przedziałem obliczonym na podstawie i-tej próbki (liczba 1.15035 jest kwantylem rzędu 0.875 standardowego rozkładu normalnego).

Następnie, przedział ufności oparty na wszystkich $5n$ obserwacjach wyznaczamy w sposób niestandardowy: za środek przedziału wybieramy *medianę*

$$m = med(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{X}_5)$$

Oblicz

$$c = \Pr\left(m - 1.15035\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le m + 1.15035\sigma/\sqrt{n}\right)$$

(z dokładnością do 0.01).

(A) $c = 0.95$

(B) $c = 0.97$

(C) $c = 0.99$

(D) $c = 0.90$

(E) $c = 0.85$

Wskazówka: Wystarczy zauważyć, że

$$\Pr\left(\overline{X}_i < \mu - 1.15035\sigma/\sqrt{n}\right) = \Pr\left(\overline{X}_i > \mu + 1.15035\sigma/\sqrt{n}\right) = 1/8\,.$$

Poza tym nie trzeba korzystać z własności rozkładu normalnego.

Zadanie 8

Niech $X_1,...,X_5$ będzie próbką z rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta / x^{\theta+1} & dla \ \ x \geq 1; \\ 0 \quad dla \ x < 1. \end{cases}$$

Rozważmy test jednostajnie najmocniejszy hipotezy $H_0 : \theta = 1/2$ przeciwko alternatywie $H_1 : \theta > 1/2$ na poziomie ufności $\alpha = 0.01$. Wyznacz obszar krytyczny tego testu. Test prowadzi do odrzucenia H_0 na rzecz H_1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $\sum_{i=1}^{5} \ln X_i < 2.5582$

(B) $\sum_{i=1}^{5} \ln X_i > 23.2093$

(C) $\sum_{i=1}^{5} X_i < e^{2.5582}$

(D) $\sum_{i=1}^{5} X_i > e^{23.2093}$

(E) $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{X_i} > e^{23.2093}$

Zadanie 9

W urnie znajduje się:

5 kul czerwonych,
3 kule białe,
2 kule zielone.

Losujemy kolejno, *bez zwracania* po 1 kuli z urny aż do momentu pojawienia się po raz pierwszy kuli białej; w tym momencie kończymy losowanie. Oblicz prawdopodobieństwo p tego, że wśród wylosowanych kul znajdzie się przynajmniej jedna zielona.

(A) $p = 2/10$

(B) $p = 1/9$

(C) $p = 2/5$

(D) $p = 5/7$

(E) $p = 1/4$

Zadanie 10

Zmienne losowe N i X są niezależne i mają rozkłady prawdopodobieństwa dane następującymi wzorami:

$\Pr(N = n) = 2^{-n}$ dla $n = 1,2,....$;
$\Pr(X > x) = 2^{-x}$ dla $x > 0$.

Oblicz $\Pr(X > N)$.

(A) $\Pr(X > N) = 2/3$

(B) $\Pr(X > N) = 1/2$

(C) $\Pr(X > N) = 1/4$

(D) $\Pr(X > N) = 1/3$

(E) $\Pr(X > N) = \ln 2$

Egzamin dla Aktuariuszy z 13 października 2001 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	A	
4	E	
5	A	
6	A	
7	B	
8	A	
9	C	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.