Zadanie 1.

Niech T będzie czasem likwidacji szkody, mierzonym w taki sposób, że $T = 0$ gdy szkodę zlikwidowano w ciągu tego samego roku, w którym do niej doszło, $T = 1$ jeśli w ciągu następnego roku, $T = 2$ jeśli jeszcze w następnym roku itd. W tabeli poniżej podany jest rozkład zmiennej T (taki sam bez względu na to, w którym roku do szkody doszło).

j	0	1	2	3	4
$\Pr(T = j)$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Niech n_t oznacza ilość szkód, które zaszły w ciągu roku *t*. Mamy dane na ten temat z roku t_0 oraz kilku lat poprzednich:

t	t_0	$t_0 - 1$	$t_0 - 2$	$t_0 - 3$	$t_0 - 4$
n_t	500	500	400	300	200

Oznaczmy przez *A* zdarzenie, iż szkoda, wylosowana ze zbioru szkód do których doszło w latach od $t_0 - 4$ do t_0 włącznie, została zlikwidowana nie później niż w ciągu okresu t_0.

Warunkowa wartość oczekiwana $E(T/A)$ wynosi:

(A) 1.340

(B) 1.411

(C) 1.625

(D) 1.770

(E) 1.900

Zadanie 2.
Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka za rok ma złożony rozkład Poissona z oczekiwaną ilością szkód równą:

- $\lambda = 0.3$

i wartością pojedynczej szkody Y o rozkładzie danym dystrybuantą $F(\cdot)$ taką, że maksymalna wartość szkody wynosi

- $\min\{m: \quad F(m)=1\}=10$,

zaś średnia wartość szkody wynosi

- $E(Y)=5$

Składka za rok dzieli się na część płatną z góry, oraz na kwoty „doubezpieczenia" płatne po każdej (ewentualnej) szkodzie. Część płatna z góry wyrażona jest w procentach maksymalnej wartości szkody i wynosi $c \cdot 10$. „Doubezpieczenie" po (ewentualnej) i-tej szkodzie o wartości Y_i następuje zgodnie z zasadą „*pro rata capita*", tzn. w kwocie dodatkowej składki równej $c \cdot Y_i$.

Parametr c skalkulowany został na zasadzie narzutu 38%, a więc tak, aby wartość oczekiwana otrzymanych składek równała się 138-iu procentom wartości oczekiwanej dokonanych wypłat.

c wynosi:

(A) 15.0%

(B) 16.4%

(C) 18.0%

(D) 19.5%

(E) 20.7%

Zadanie 3.
Wartość szkody *Y* ma rozkład dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_Y(y) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot y^{\alpha-1} e^{-\beta \cdot y}$,

a parametry rozkładu wynoszą $\alpha = 6$; $\beta = 2$
Wartość oczekiwana nadwyżki szkody ponad wartość oczekiwaną, tzn.:

- $E\left[(Y - EY)_+\right]$

wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.48

(B) 0.61

(C) 0.74

(D) 0.87

(E) 1.00

Zadanie 4.
Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka ma złożony rozkład Poissona z wartością oczekiwaną ilości szkód równą $\lambda = \frac{1}{3}$, i rozkładem wartości pojedynczej szkody danym na przedziale $(0, \quad 10)$ gęstością:

$$f_Y(y) = \frac{2}{100} \cdot (10 - y).$$

Ubezpieczyciel pokrywa pierwszą ze szkód (jeśli do niej dojdzie) w pełni, zaś z każdej następnej szkody jej nadwyżkę ponad 1. Jeśli więc przez *X* oznaczymy łączną wartość wypłat, to:

$$X = \begin{cases} 0 & gdy \quad N = 0 \\ Y_1 & gdy \quad N = 1 \\ Y_1 + \sum_{i=2}^{N} (Y_i - 1)_+ & gdy \quad N > 1 \end{cases}$$

Zakładamy, że wszystkie szkody są natychmiast zgłaszane, i w związku z tym nie istnieje możliwość deklarowania „po fakcie", która ze szkód była tą pierwszą. Składka netto za to pokrycie, czyli $E(X)$ wynosi:

(A) 1.111

(B) 1.066

(C) 1.009

(D) 0.952

(E) 0.909

Zadanie 5.

Łączna wartość szkód z polisy wynosi:

$X = Y_1 + \ldots + Y_N$, (zero, jeśli $N = 0$).

Przy danej wartości parametru ryzyka $\Lambda = \lambda$ zmienna X ma rozkład złożony Poissona z oczekiwaną ilością szkód równą $E(N/\Lambda = \lambda) = \lambda$ oraz rozkładem pojedynczej szkody o wartości oczekiwanej $E(Y/\Lambda = \lambda) = e^{-\lambda}$.

Zróżnicowanie parametru ryzyka Λ w populacji ubezpieczonych opisuje rozkład wykładniczy o gęstości na półosi dodatniej danej wzorem:

$f_{\Lambda}(\lambda) = 5 \cdot e^{-5 \cdot \lambda}$.

Warunkowa wartość oczekiwana $E(Y|N = 1)$ wynosi:

(A) $\exp\left(-\frac{1}{3}\right)$

(B) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$

(C) $\exp\left(-\frac{1}{4}\right)$

(D) $\exp\left(-\frac{1}{5}\right)$

(E) $\frac{5}{6}$

Zadanie 6.

Łączna wartość szkód z całego portfela S równa jest sumie $S_1 + S_2$, oznaczających odpowiednio łączną wartość szkód z dwóch subportfeli.

Ilość szkód N_1 w pierwszym subportfelu ma rozkład dwumianowy o parametrach $\left(100, \quad \frac{1}{5}\right)$ (sto polis, z każdej z nich szkoda z p-stwem 0.2).

Ilość szkód N_2 w drugim subportfelu (niezależna od ilości w pierwszym) ma rozkład ujemny dwumianowy o parametrach $(r, \quad q)$.

W obu subportfelach wartości pojedynczych szkód Y_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie ze skończoną wartością oczekiwaną $E(Y)$ i skończoną wariancją $VAR(Y)$ (w obu subportfelach jest to ten sam rozkład), niezależnymi także od ilości szkód N_1 i N_2.

Jeśli wiadomo, że $E(S_1) = E(S_2)$ oraz że $VAR(S) = E(N_1 + N_2) \cdot E(Y^2)$, to parametr q rozkładu zmiennej N_2 wynosi:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{5}$

(E) $\frac{1}{6}$

Zadanie 7.

Zakładamy, że ubezpieczyciel pokrywa ryzyka, które za okres roku generują łączną wartość szkód:

$S = Y_1 + \ldots + Y_N$,

- o złożonym rozkładzie Poissona, gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody Y dany jest dystrybuantą $F(\cdot)$ taką, że $F(0) = 0$
- oraz iż pobiera za to pokrycie składkę w wysokości składki netto $E(S)$

Niech $M = \min\{m: \quad F(m) = 1\}$ będzie maksymalną wartością szkody z pokrywanych ryzyk.

Rozważmy liczbę c taką, że jeśli tylko zachodzi nierówność:

- $M \le c \cdot E(S)$

to współczynnik zmienności zmiennej S nie przekroczy 10%:

- $\dfrac{\sqrt{VAR(S)}}{E(S)} \le 10\%$

Znajdź liczbę c^*, która jest największą spośród liczb c o powyższej własności.

(A) $c^* = \sqrt{0.1}$

(B) $c^* = 0.1$

(C) $c^* = 0.1 \cdot \sqrt{0.1}$

(D) $c^* = 0.01$

(E) $c^* = 0$, ponieważ podane założenia nie wystarczają na to, aby jakikolwiek dodatni limit c zapewniał zachodzenie nierówności $\sqrt{VAR(S)} \le 10\% \cdot E(S)$

Zadanie 8.
Niech S oznacza łączną wartość szkód z podstawowego portfela ryzyk, zaś X łączną wartość szkód z pewnego dodatkowego ryzyka. Rozważamy skutki dołączenia dodatkowego ryzyka do podstawowego portfela ryzyk, zakładając iż zmienne S oraz X są niezależne.
Oznaczmy przez:

- σ_S^2 oraz γ_S wariancję oraz współczynnik skośności zmiennej S
- σ_X^2 oraz γ_X wariancję oraz współczynnik skośności zmiennej X
- σ_{S+X}^2 oraz γ_{S+X} wariancję oraz współczynnik skośności zmiennej $S + X$

Przyjmujemy typowe założenie, iż $\gamma_S > 0$

Znajdź taką liczbę G, że prawdziwa jest implikacja:

- $\left(\gamma_{S+X} \geq \gamma_S\right) \rightarrow \left(\dfrac{\sigma_X \cdot \gamma_X}{\sigma_S \cdot \gamma_S} > G\right),$

a ponadto iż oszacowanie ilorazu $\dfrac{\sigma_X \cdot \gamma_X}{\sigma_S \cdot \gamma_S}$ z dołu za pomocą liczby G nie daje się poprawić – co przejawia się w ten sposób iż w przypadku, gdy $\gamma_{S+X} = \gamma_S$ zachodzi:

- $\lim\limits_{\frac{\sigma_X}{\sigma_S} \to 0} \left(\dfrac{\sigma_X \cdot \gamma_X}{\sigma_S \cdot \gamma_S}\right) = G$

(A) $G = 0$

(B) $G = \dfrac{1}{2}$

(C) $G = 1$

(D) $G = \dfrac{3}{2}$

(E) $G = 2$

Zadanie 9.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:

$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,...$

gdzie $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach niezależnych o rozkładzie normalnym.

Dokładniej, przyjmujemy że:

- $W_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$
- nadwyżka początkowa u jest nieujemna, a średni przyrost dodatni $c > \mu$,
- N jest czasem zajścia ruiny, tzn. równe jest najmniejszej z liczb naturalnych takich, że $U_n < 0$ ($N = \infty$, jeśli dla każdego *n* nadwyżka jest nieujemna).

Niech Ψ oznacza standardowe górne oszacowanie (Lundberga) dla prawdopodobieństwa ruiny.

Załóżmy, iż założenia powyższe spełniają:

- proces U_n^X nadwyżki ubezpieczyciela *X*, o parametrach $(u_X, c_X, \mu_X, \sigma_X^2)$,
- proces U_n^Y nadwyżki ubezpieczyciela *Y*, o parametrach $(u_Y, c_Y, \mu_Y, \sigma_Y^2)$;

a także iż procesy nadwyżki ubezpieczycieli U_n^X oraz U_n^Y są niezależne.

Rozważa się połączenie ubezpieczycieli *X* oraz *Y* w jedną firmę *S*, co da w rezultacie proces nadwyżki także spełniający bazowe założenia, o parametrach:

- $(u_S, c_S, \mu_S, \sigma_S^2) = (u_X + u_Y, c_X + c_Y, \mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Niech teraz Ψ_X, Ψ_Y oraz Ψ_S oznaczają standardowe górne oszacowania (Lundberga) dla prawdopodobieństwa ruiny w procesach nadwyżki odpowiednio: ubezpieczyciela *X*, ubezpieczyciela *Y*, oraz połączonego ubezpieczyciela *S*.

Nierówność:

$\Psi_S < \Psi_X \cdot \Psi_Y$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) nigdy nie zachodzi

(B) $\left(\dfrac{u_X}{\sigma_X^2} - \dfrac{u_Y}{\sigma_Y^2}\right) \cdot \left(\dfrac{c_X - \mu_X}{\sigma_X^2} - \dfrac{c_Y - \mu_Y}{\sigma_Y^2}\right) > 0$

(C) $\left(\dfrac{u_X}{\sigma_X^2} - \dfrac{u_Y}{\sigma_Y^2}\right) \cdot \left(\dfrac{c_X - \mu_X}{\sigma_X^2} - \dfrac{c_Y - \mu_Y}{\sigma_Y^2}\right) < 0$

(D) $\left(\dfrac{u_X}{\sigma_X} - \dfrac{u_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot \left(\dfrac{c_X - \mu_X}{\sigma_X} - \dfrac{c_Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) > 0$

(E) $\left(\dfrac{u_X}{\sigma_X} - \dfrac{u_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot \left(\dfrac{c_X - \mu_X}{\sigma_X} - \dfrac{c_Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) < 0$

Zadanie 10.
Rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest mieszanką dwóch rozkładów wykładniczych, i na półosi dodatniej jego gęstość dana jest wzorem:

- $f_Y(x) = \frac{1}{2} \cdot [5 \cdot \exp(-5x) + 17 \cdot \exp(-17x)]$

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela w czasie ciągłym. Tak więc szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, a składka napływa w sposób ciągły, przekraczając o $\theta = 6/11$ oczekiwany przyrost łącznej wartości szkód, a więc intensywność składki wynosi $c = \frac{17}{11} \cdot \lambda \cdot E(Y)$.
Współczynnik przystosowania (*adjustment coefficient*) R wynosi:

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 7

(E) 15

Egzamin dla Aktuariuszy z 13 października 2001 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	C	
3	A	
4	B	
5	B	
6	E	
7	D	
8	D	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.