Zadanie 1.

Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Niech $S = X_1 + X_2 + X_3$. Obliczyć

$$p = \Pr(X_1 > S/2 \text{ lub } X_2 > S/2 \text{ lub } X_3 > S/2).$$

(A) $p = 3/4$

(B) $p = 2/3$

(C) $p = 1/2$

(D) $p = 2/e$

(E) $p = e/4$

Zadanie 2.
Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo i niezależnie 2 punkty. Obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (odległość mierzymy *wzdłuż cięciwy*).

(A) $\pi^2/10$

(B) $\pi/2$

(C) $4/3$

(D) $4/\pi$

(E) 1

Zadanie 3.

Niech Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym Y_k ma rozkład normalny $N(k\mu, \sigma^2)$, dla $k = 1,2,3,4$. Rozważamy estymatory nieznanego parametru μ postaci

$$\hat{\mu} = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 .$$

Znaleźć *najmniejszą wariancję* estymatora powyższej postaci, przy założeniu, że jest to estymator *nieobciążony*.

(A) $(\sigma^2 + \mu^2)/30$

(B) $\sigma^2 / 30$

(C) $\sigma^2 / 4$

(D) $\sigma^2 / 25$

(E) Nie istnieje estymator, który dla wszystkich wartości parametrów μ i σ^2 ma najmniejszą wariancję, wśród estymatorów nieobciążonych rozważanej postaci.

Zadanie 4.
Rozważamy kolektywny model ryzyk. Zakładamy, że

$$S = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

gdzie N oraz $X_1, X_2,\ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną λ, zaś rozkład każdej ze zmiennych X_n podaje następująca tabelka:

x	1	2
$\Pr(X_n = x)$	2/3	1/3

Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $E(N \mid S = 3)$.

(A) $2 + 1/2$

(B) $6 \cdot \dfrac{\lambda + 3}{2\lambda + 9}$

(C) $\dfrac{4\lambda + 27}{2\lambda + 9}$

(D) $2 + 1/3$

(E) $2 + 2/3$

Zadanie 5.

Niech $X_1,...,X_{10},...,X_{20}$ będzie próbką losową z rozkładu normalnego $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, z nieznanymi parametrami μ i σ^2. Niech

$$\overline{X}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i, \quad \overline{X}_{20} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i,$$

$$S^2 = S_{10}^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X}_{10})^2.$$

Należy skonstruować przedział $[\overline{X}_{10} - aS, \overline{X}_{10} + aS]$ taki, że

$$\Pr\left(\overline{X}_{20} \in [\overline{X}_{10} - aS, \overline{X}_{10} + aS]\right) = 0.95.$$

Wybierz odpowiednią liczbę a.

(A) $a = 2.0930/\sqrt{20}$

(B) $a = 2.2622/\sqrt{20}$

(C) $a = 2.2622/\sqrt{10}$

(D) $a = 2.0930/\sqrt{20/3}$

(E) $a = 2.2622/\sqrt{20/3}$

Zadanie 6.
Załóżmy, że X_0 oraz $W_1, W_2, ..., W_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym każda ze zmiennych $W_1, W_2, ..., W_{10}$ ma jednakowy rozkład normalny $N(5,1)$. Niech

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + W_{n+1}, \text{ dla } n = 0,1,...,9.$$

Jeśli wiadomo, że zmienne losowe X_0 i X_{10} mają rozkład normalny o jednakowych parametrach, to jest nim rozkład

(A) $N(0, 4/3)$

(B) $N(5,1)$

(C) $N(10, 4/3)$

(D) $N(10,1)$

(E) $N(5, 4/3)$

Uwaga: Symbol $N(\mu, v)$ oznacza rozkład normalny o *wariancji* v.

Zadanie 7.
Rzucamy 10 razy monetą. Niech K_5 oznacza liczbę orłów w pierwszych 5 rzutach, zaś K_{10} liczbę orłów we wszystkich 10 rzutach. Obliczyć

$$E\,Var\left[K_5 \middle| K_{10}\right].$$

(A) 0.75

(B) 0.625

(C) 1.5

(D) 1.125

(E) 0.5

Zadanie 8.

Załóżmy, że dysponujemy pojedynczą obserwacją X z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$. Rozważmy zadanie testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = 0 \quad i \quad \sigma^2 = 1$$

przeciw alternatywie

$$H_1 : \mu = 1 \quad i \quad \sigma^2 = 4.$$

Najmocniejszy test na poziomie istotności α jest postaci

$$\textit{Odrzuć } H_0, \textit{ gdy } X \notin (-2, b).$$

Podaj b i poziom istotności α.

(A) $b = 2, \quad \alpha = 0{,}05$

(B) $b = 1, \quad \alpha = 0{,}18$

(C) $b = 0, \quad \alpha = 0{,}91$

(D) $b = \infty, \quad \alpha = 0{,}02$

(E) $b = 4/3, \quad \alpha = 0{,}11$

Zadanie 9.
Załóżmy, że $Y_1,...,Y_n,...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:

$$\Pr(Y_n = 0) = \Pr(Y_n = 1) = ... = \Pr(Y_n = 9) = \frac{1}{10}.$$

Niech $X_0 = 0$, oraz niech:
dla $n = 1,2,...$

$$X_n = \begin{cases} \max(X_{n-1}, Y_n), & gdy \quad Y_n > 0; \\ 0, & gdy \quad Y_n = 0. \end{cases}$$

Podać granicę $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \geq 3)$.

(A) 6/9

(B) 7/9

(C) 7/10

(D) 7/8

(E) granica nie istnieje

Wskazówka: Oblicz $\Pr(X_n \geq 3 | X_{n-1} < 3)$ i $\Pr(X_n < 3 | X_{n-1} \geq 3)$.

Zadanie 10.
Załóżmy, że A i B są zdarzeniami losowymi takimi, że $\Pr(A-B)>0$, $\Pr(B-A)>0$ oraz $\Pr(A\cap B)>0$. Jeśli dla pewnego zdarzenia C zachodzi nierówność

$$\Pr(C|A\cup B)>\Pr(C|A),$$

to z tego *wynika*, że:

(A) $\Pr(C|A\cup B)<\Pr(C|B)$

(B) $\Pr(C|A\cap B)>\Pr(C|A)$

(C) $\Pr(C|B-A)>\Pr(C|A)$

(D) $\Pr(C|B)>\Pr(C)$

(E) $\Pr(C|B-A)>\Pr(C|A-B)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 9 grudnia 2000 r.

Prawdopodobieństwo i Statystyka

Arkusz odpowiedzi*

~~Imię i nazwisko~~ .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

~~Pesel~~ ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	B	
4	B	
5	B	
6	C	
7	B	
8	E	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.