Zadanie 1.

S_1 to łączna wartość szkód z pierwszego portfela ryzyk, a S_2 to łączna wartość szkód z drugiego portfela ryzyk.

Portfel pierwszy zawiera 300 niezależnych ryzyk, w tym:

Ilość ryzyk	p-stwo zajścia szkody	Oczekiwana wartość szkody	Wariancja wartości szkody
100	0.1	1	4
100	0.1	2	4
100	0.1	3	4

Portfel drugi zawiera 300 niezależnych ryzyk identycznych: z p-stwem zajścia szkody równym 0.1, oczekiwaną wartością szkody równą 2 i wariancją wartości szkody równą 14/3.
Różnica $VAR(S_2) - VAR(S_1)$ jest równa:

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 2

(E) 3

Zadanie 2.
Niech X oznacza ryzyko związane z bezpośrednimi skutkami finansowymi pewnego wypadku ubezpieczeniowego, zaś Z ryzyko związane z jego pośrednimi konsekwencjami. Jednym słowem, wiemy że $\Pr(Z > 0 / X = 0) = 0$. Mamy następujące dane:

$\Pr(X > 0) = 0.5$

$\Pr(Z > 0 / X > 0) = 0.5$

$E(X / X > 0 \wedge Z = 0) = 2$

$E(X / X > 0 \wedge Z > 0) = 4$

$E(Z / Z > 0) = 4$

$COV(X, Z / X > 0 \wedge Z > 0) = c$

Bezwarunkowa kowariancja $COV(X, Z)$ wynosi:

(A) $0.25c + 2$

(B) $0.25c + 2.5$

(C) $0.25c + 3$

(D) $0.25c + 3.5$

(E) $0.25c + 4$

Zadanie 3.

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka ma rozkład złożony Poissona z parametrem częstotliwości równym 0.2 oraz rozkładem pojedynczej szkody Y:

$\Pr(Y = 1) = 0.5$

$\Pr(Y = 2) = 0.3$

$\Pr(Y = 3) = 0.2$

Składka netto za pokrycie łącznej wartości szkód do wysokości 3 (nadwyżka łącznej wartości szkód ponad 3 pozostaje niepokryta),
wynosi (w przybliżeniu):

(A) 0.321

(B) 0.327

(C) 0.332

(D) 0.336

(E) 0.340

Zadanie 4.
Ilość szkód dla pewnego jednorodnego portfela ryzyk ma rozkład ujemny dwumianowy, a wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Składka netto za nadwyżkę łącznej wartości szkód S ponad liczbę k wynosi:

k	1	2	3	4
$E[(S-k)_+]$	5.2500	4.5500	3.9075	3.3310

Wobec tego $\Pr(S = 2 \vee S = 3)$ wynosi:

(A) 0.0575

(B) 0.0660

(C) 0.1235

(D) 0.5765

(E) 0.7000

Zadanie 5.
Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka za okres od zera do t wynosi:
$X(t) = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{N(t)}$ (lub zero jeśli $N(t)$ równe jest zero)
gdzie $N(t)$ jest procesem Poissona z częstotliwością λ rocznie, zaś wartości kolejnych szkód mają ten sam rozkład i są niezależne (nawzajem i od procesu $N(t)$).
Wiemy, że rozkład wartości pojedynczej szkody jest określony na odcinku (0, 1) i ma wartość oczekiwaną równą μ.
Ubezpieczyciel proponuje roczne ubezpieczenie o sumie ubezpieczenia równej 1 z „odnowieniami" pełnej sumy ubezpieczenia po każdej szkodzie.
Dokładniej, jeśli przyjmiemy $T_0 = 0$ i oznaczymy przez $(T_1, Y_1), (T_2, Y_2), ...$ odpowiednio momenty zajścia i wartości kolejnych szkód, to ubezpieczony płaci składkę:

- w wyjściowej kwocie c na początku roku (w momencie T_0)
- w kwocie $c \cdot Y_k \cdot [(1 - T_k)_+]$ po zajściu k-tej szkody

Oczekiwana wartość (bez dyskontowania) kwoty składki wnoszonej przez ubezpieczonego, który po każdej ewentualnej szkodzie dokonuje „odnowienia" pełnej sumy ubezpieczenia, wynosi:

(A) $c \cdot \left(1 + \frac{\lambda\mu}{2}\right)$

(B) $c \cdot (1 + \lambda\mu)$

(C) $c \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{2}\right)$

(D) $c \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{\lambda}{2 + \lambda}\right)$

(E) $c \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right)$

Zadanie 6.

W momencie t_0 wiemy o pewnym ryzyku, iż generuje ono szkody zgodnie z procesem Poissona ze stałą częstotliwością λ rocznie, a o parametrze λ zakładamy a priori, iż jest realizacją zmiennej losowej Λ o rozkładzie Gamma(100, ½) (tzn. o rozkładzie chi-kwadrat z 200-oma stopniami swobody).
Postanowiliśmy uściślić naszą wiedzę o parametrze λ zmierzywszy czas, jaki upłynie od momentu t_0 do momentu t_{40} zajścia 40-tej z kolei szkody. Okazało się, iż na ten moment musieliśmy czekać 1/6 roku. Teraz wartość oczekiwana (warunkowa, pod warunkiem że na 40-tą szkodę czekaliśmy tyle, ile czekaliśmy) zmiennej Λ wynosi:

(A) 200

(B) 210

(C) 220

(D) 230

(E) 240

Zadanie 7.

Rozważamy n jednakowych, niezależnych ryzyk. Dla każdego z tych ryzyk:

- może wystąpić jedna szkoda z p-stwem q
- lub nie wystąpić – z p-stwem $p = 1 - q$

Wysokości szkód dla tych ryzyk są zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto z gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Niech M oznacza maksymalną wysokość spośród szkód, które wystąpiły (lub zero, jeśli nie wystąpiła żadna szkoda)

Jeśli przyjmiemy:

$n = 16$, oraz

$q = 0.424$,

to mediana zmiennej M w przybliżeniu wyniesie:

(A) 4

(B) 5

(C) 7

(D) 9

(E) 13

Zadanie 8.
Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona z zerową nadwyżką początkową, z dodatnią wartością oczekiwaną przyrostów, oraz z rozkładem wartości pojedynczej szkody danym gęstością:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \textit{poza tym} \end{cases}$$

Warunkowa wartość oczekiwana deficytu w momencie ruiny (pod warunkiem że do ruiny dojdzie) wynosi:

(A) 5

(B) 4

(C) 10/3

(D) 20/7

(E) 2.5

Zadanie 9.
Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela postaci:
$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$,
gdzie:

- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem częstotliwości λ,
- $Y_1, Y_2, \ldots$ są wartościami kolejnych szkód (niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$)

Oznaczmy przez Ψ prawdopodobieństwo ruiny:
$\Psi = \Pr(T < \infty)$, gdzie T oznacza moment zajścia ruiny: $T = \inf\{t: \quad t \geq 0, \quad U(t) < 0\}$.
Przyjmijmy, iż parametry procesu wynoszą:
$\lambda = 5$,
$c = 30$,
a rozkład pojedynczej szkody dany jest gęstością Gamma:

$$f(x) = \begin{cases} 0.16 \cdot x \cdot \exp(-0.4 \cdot x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Znajdź taką wartość początkową nadwyżki u, przy której prawdopodobieństwo ruiny, wyznaczone w sposób przybliżony metodą de Vylder'a, wynosi 0.5.

(A) $u \approx 6$

(B) $u \approx 7.5$

(C) $u \approx 9$

(D) $u \approx 10.5$

(E) $u \approx 11.5$

Wskazówka: metoda de Vylder'a polega na zastąpieniu procesu właściwego przez proces aproksymujący, gdzie bez zmiany pozostają parametry u oraz c, gdzie w procesie aproksymującym rozkład pojedynczej szkody jest wykładniczy, oraz gdzie pozostałe parametry procesu aproksymującego są dobrane tak, aby przyrosty obu procesów (za okres o pewnej długości) miały tę samą wartość oczekiwaną i wariancję.

Zadanie 10.
Proces pojawiania się szkód jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością λ. Wartość szkody, która pojawia się w momencie *t*, wynosi (z p-stwem jeden) $\exp(\delta t)$.
Okresy czasu, jakie upływają od momentu zajścia szkody do momentu wypłaty odszkodowania są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Gamma danym gęstością:

$$f(t)=\begin{cases}\gamma^2 \cdot t \cdot \exp(-\gamma \cdot t) & t \geq 0\\ 0 & t < 0\end{cases}$$

Wartość oczekiwana łącznej kwoty szkód zaistniałych, a nie wypłaconych do momentu t_0 (rezerwa szkodowa na moment t_0) wynosi:

(A) $\lambda \cdot \exp(\delta t_0) \cdot \dfrac{2\gamma+\delta}{(\gamma+\delta)^2}$

(B) $\lambda \cdot \exp(\delta t_0) \cdot \left(\dfrac{\gamma}{\gamma+\delta}\right)^2$

(C) $\lambda \cdot \exp(\delta t_0) \cdot \dfrac{2}{\gamma+\delta}$

(D) $\lambda \cdot \exp(\delta t_0) \cdot \dfrac{\gamma}{(\gamma+\delta)^2}$

(E) $\lambda \cdot \exp(\delta t_0) \cdot \dfrac{2\gamma}{(\gamma+\delta)^2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 14 października 2000 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	B	
4	C	
5	A	
6	B	
7	D	
8	E	
9	E	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.