Zadanie 1.

Liczba szkód N (w pewnym portfelu ryzyk) ma rozkład dwumianowy o parametrach (n, q_N), (tzn. model n niezależnych prób, z p-stwem szkody w jednej próbie równym q_N). Przyjmujemy $n > 1$.

Rozkład wartości pojedynczej szkody Y jest dwupunktowy:

$\Pr(Y = 1) = 1 - \Pr(Y = 2) = p_Y$, $\quad p_Y \in (0, 1)$

Łączna wartość szkód z portfela jest równa:

$S = Y_1 + \ldots + Y_N$ (w przypadku gdy $N = 0$ przyjmujemy $S = 0$).

Przyjmujemy standardowe założenia o wzajemnej niezależności zmiennych losowych: N oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Jeśli $q_N = 0.36$, to jakie musi być p_Y, aby rozkład zmiennej S był także rozkładem dwumianowym?

(A) p_Y musi być równe $\frac{8}{9}$

(B) p_Y musi być równe $\frac{4}{9}$

(C) p_Y musi być równe $\frac{1}{9}$

(D) nie istnieje takie $p_Y \in (0, 1)$

(E) S będzie miała rozkład dwumianowy dla dowolnego $p_Y \in (0, 1)$

Zadanie 2.
W pewnym rodzaju ubezpieczenia każde ryzyko generuje szkodę (co najwyżej jedną) z takim samym prawdopodobieństwem. Ryzyka generują szkody o wartościach będących dodatnimi zmiennymi losowymi o gęstościach wykładniczych:
$f_{Y|B=\beta}(y) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot y}$,
Populacja ryzyk charakteryzuje się jednak dużym zróżnicowaniem skali tych ryzyk, reprezentowanej przez parametr β rozkładu.
Jeśli przyjmiemy, iż rozkład parametru skali w populacji ryzyk ma na półosi dodatniej gęstość:
$g_B(\beta) = e^{-\beta}$,
to dla losowo dobranego ryzyka z populacji, warunkowa wartość oczekiwana szkody (pod warunkiem że do niej dojdzie) wyniesie:

(A) 1

(B) $\frac{3}{2}$

(C) 2

(D) 3

(E) ∞

Zadanie 3.

Klient jest narażony na szkodę, której prawdopodobieństwo zajścia wynosi 0,01, a rozkład wartości szkody ma gęstość daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot (1000 - x)}{1000000} & dla \quad x \in (0, \quad 1000) \\ 0 & dla \quad x \notin (0, \quad 1000) \end{cases}$$

Ubezpieczyciel oferuje klientowi ubezpieczenie z udziałem własnym w kwocie *d*, pozostawiając do wyboru klienta wysokość tej kwoty. Cena ubezpieczenia składa się w 10-ciu procentach z narzutu, reszta pokrywa oczekiwaną wartość odpowiedzialności ubezpieczyciela. Jaką wysokość udziału własnego *d* powinien wybrać klient, jeżeli chce przeznaczyć na zakup ubezpieczenia kwotę 2 zł 70 gr?

(A) 100 zł

(B) 90 zł

(C) 81 zł

(D) 72 zł

(E) 64 zł

Zadanie 4.
Rozkład łącznej wartości szkód S w nadchodzącym roku aproksymujemy za pomocą zmiennej losowej $\tilde{S}$ o przesuniętym rozkładzie logarytmiczno-normalnym z parametrami $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2)$ - tzn. zmienna $\ln(\tilde{S} - x_0)$ ma rozkład normalny o parametrach $(\mu,\ \sigma^2)$. Zmienna $\tilde{S}$ ma z założenia mieć te same momenty pierwszych trzech rzędów, co zmienna S.
Jeśli o momentach zmiennej S założymy, iż:

$$E(S) = 100{,}16$$
$$E(S^2) = \exp\left(\tfrac{83}{9}\right)$$
$$E(S^3) = \exp(14)$$

to parametry rozkładu zmiennej $\tilde{S}$ wyniosą:

(A) $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2) = \left(7.61,\ \tfrac{9}{2},\ \tfrac{1}{18}\right)$

(B) $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2) = \left(7.61,\ \tfrac{25}{6},\ \tfrac{7}{9}\right)$

(C) $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2) = \left(5.00,\ \tfrac{9}{2},\ \tfrac{1}{18}\right)$

(D) $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2) = \left(5.00,\ \tfrac{25}{6},\ \tfrac{7}{9}\right)$

(E) $(x_0,\ \mu,\ \sigma^2) = \left(5.00,\ \tfrac{9}{2},\ \tfrac{1}{9}\right)$

Zadanie 5.
Ubezpieczyciel odnotował następujące wyniki ubezpieczenia trwałych uszczerbków zdrowia w następstwie nieszczęśliwych wypadków w pewnym zakładzie pracy:

	1 rok	2 rok	3 rok	4 rok
Ilość ubezpieczonych	1200	1200	1200	1200
Suma ubezpieczenia	5 tys. zł	7 tys. zł	8,1 tys. zł	9 tys. zł
Odszkodowania + przyrost rezerw szkodowych	55 tys. zł	70 tys. zł	86,4 tys. zł	93 tys. zł

W piątym roku ubezpieczeniem będzie objętych 1500 osób, a suma ubezpieczenia wyniesie 9,5 tys. zł. Ile powinna wynieść łączna składka za piąty rok ubezpieczenia, aby z prawdopodobieństwem 0,95 była ona większa od łącznej wartości szkód i przyrostu rezerw szkodowych?

Uwaga: przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- każdy ubezpieczony za rok czasu stanowi pojedyncze ryzyko,
- ryzyka te są niezależne (tak w przekroju jak i w czasie)
- rozkład ilości szkód na ryzyko oraz rozkład wartości szkody (wyrażony w procentach sumy ubezpieczenia) nie ulegają zmianom w latach 1, 2, 3, 4, 5
- liczba 1200 ryzyk jest wystarczająca, aby rozkład łącznej wartości szkód przybliżać rozkładem normalnym.
- wartość oczekiwaną i wariancję szacujemy za pomocą typowych dla próbki z rozkładu normalnego estymatorów (uwzględniając odpowiednio zmiany skali i liczby ryzyk w kolejnych latach)
- wariancję predykcji liczymy z pominięciem efektu błędu estymacji obu parametrów

(A) 133,3 tys. zł

(B) 132,2 tys. zł

(C) 130,8 tys. zł

(D) 129,5 tys. zł

(E) 128,1 tys. zł

Zadanie 6.

Przy identycznych danych jak w zadaniu 5, odpowiedz na tak samo brzmiące pytanie, tzn.:

„Ile powinna wynieść łączna składka za piąty rok ubezpieczenia, aby z prawdopodobieństwem 0,95 była ona większa od łącznej wartości szkód i przyrostu rezerw szkodowych?”

przy przyjęciu jednak zmodyfikowanej wersji ostatniego z założeń upraszczających:

- tym razem uwzględniamy także ten składnik błędu predykcji, który jest efektem błędu estymacji (z próbki) wartości oczekiwanej rozkładu (nadal dla uproszczenia pomijając efekt błędu estymacji wariancji rozkładu)

(A) 130,8 tys. zł

(B) 132,2 tys. zł

(C) 133,3 tys. zł

(D) 134,5 tys. zł

(E) 135,7 tys. zł

Zadanie 7.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela jest złożonym procesem Poissona, w którym θ to stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto (dodatni), L to maksymalna całkowita strata, a L_1 to wartość, o którą nadwyżka spada poniżej poziomu wyjściowego (o ile do takiego spadku dochodzi). Jeżeli L_1 ma rozkład o gęstości równej:

$\frac{1}{3}$	dla $0 \le x < 2$
$\frac{1}{6}$	dla $2 \le x < 4$
0	dla pozostałych x

to funkcja generująca momenty $M_L(r)$ dla r nierównego zeru wynosi:

(A) $$\frac{3\cdot\theta\cdot r}{1+3r(1+\theta)-\frac{1}{2}e^{2}(e^{2}+1)}$$

(B) $$\frac{\theta\cdot r}{1+r(1+\theta)-\frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}+1)}$$

(C) $$\frac{3\cdot\theta\cdot r}{1+3r(1+\theta)-\frac{1}{2}e^{2r}(e^{2r}-1)}$$

(D) $$\frac{\theta\cdot r}{1+r(1+\theta)-\frac{1}{6}e^{2r}(e^{2r}-1)}$$

(E) $$\frac{3\cdot\theta\cdot r}{1+3r(1+\theta)-\frac{1}{2}e^{2r}(e^{2r}+1)}$$

Zadanie 8.

Niech $N_1, N_2, \ldots$ oznaczają liczby szkód, które zdarzyły się w kolejnych latach, począwszy od roku nr. 1 (przedtem szkód nie było). Zakładamy, że są to niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie Poissona o wartości oczekiwanej λ .Każda ze szkód, która zdarzyła się w roku i-tym, zostaje zgłoszona w roku $i + D$, gdzie opóźnienie D jest zmienną losową o wartościach 0, 1, 2, ...
Zakładamy, że zmienne losowe opisujące opóźnienie są dla wszystkich szkód niezależne i mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, o którym wiemy że:

- $\Pr(D > n) > 0$ dla dowolnego n (nie istnieje „maksymalne możliwe opóźnienie”)
- $\lim_{n \to \infty} \Pr(D > n) = 0$ (każda szkoda w końcu kiedyś zostanie zgłoszona)

Niech $Z_1, Z_2, \ldots$ oznaczają liczby szkód zgłoszonych w kolejnych latach.
Dla dowolnych Z_i, Z_j, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, $i \neq j$ prawdą jest, że:

(A) $E(Z_i) = VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

(B) $VAR(Z_i) < E(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

(C) $E(Z_i) = VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) > 0$

(D) $E(Z_i) < VAR(Z_i) < \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) < 0$

(E) $E(Z_i) < VAR(Z_i) = \lambda$ i $COV(Z_i, Z_j) = 0$

Zadanie 9.
Rozważamy model, w którym stan nadwyżki ubezpieczyciela U_n na koniec roku n równy jest:

$$U_n = U_{n-1} \cdot (1+i) - i \cdot u + c - W_n,$$

gdzie:

- i reprezentuje stopę przychodów z inwestycji nadwyżki (inwestujemy na początku roku n-tego całą bieżącą nadwyżkę), i równocześnie wyraża stopę dywidendy wypłacanej akcjonariuszom (wyrażoną w stosunku do nadwyżki początkowej u)
- W_n to łączna wartość szkód w roku n-tym, o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$
- W_n, W_m są niezależnymi zmiennymi losowymi
- c to składka za rok

Oznaczmy przez B_n wartość początkową nadwyżki z końca roku n:

$$B_n = \frac{U_n}{(1+i)^n},$$ gdzie do celów dyskontowania użyto tej samej stopy procentowej i,

a przez B jej graniczną wartość B_n:

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Jeśli stopa procentowa i wynosi 5%, to składka c, która zapewnia, iż:

$$\Pr(B > 0) = 0{,}95,$$

wynosi (w przybliżeniu):

(A) $c \approx \mu + 0.200 \cdot \sigma$

(B) $c \approx \mu + 0.230 \cdot \sigma$

(C) $c \approx \mu + 0.257 \cdot \sigma$

(D) $c \approx \mu + 0.281 \cdot \sigma$

(E) $c \approx \mu + 0.303 \cdot \sigma$

Zadanie 10.
W poniższej tabeli zawarte są wyniki pierwszych dwóch lat działalności ubezpieczyciela majątkowego (tys. EURO):

	1 rok	**2 rok**
Przypis składki	**4 000**	**27 200**
udział reasekuratora	*0*	*2 000*
Odszkodowania	**950**	**10 000**
udział reasekuratora	*0*	*0*
Rezerwa składek	**600**	**4 000**
udział reasekuratora	*0*	*500*
Rezerwa szkodowa	**700**	**12 000**
udział reasekuratora	*0*	*0*

W ostatnich dniach 2-go roku doszło do dużej szkody. Po zakończeniu roku (zanim nadeszła informacja o ww. szkodzie) obliczono margines wypłacalności. Teraz należy skorygować to wyliczenie.
Ryzyko, z którego doszło do szkody, było chronione umową reasekuracyjną Excess of Loss z zachowkiem 200 tys EURO i pokryciem do 4 mln EURO (ponad kwotę zachowku). Wielkość szkody jest szacowana na 10 mln EURO. Jak zmieni się margines wypłacalności na koniec drugiego roku działalności w wyniku dokonania korekty?

(A) wzrośnie o ok. 0,6 mln EURO

(B) wzrośnie o ok. 1,1 mln EURO

(C) nie zmieni się

(D) spadnie o ok. 1,1 mln EURO

(E) spadnie o ok. 0,6 mln EURO

Egzamin dla Aktuariuszy z 8 kwietnia 2000 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... K L U C Z   O D P O W I E D Z I ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	E	
3	A	
4	E	
5	B	
6	C	
7	E	
8	A	
9	C	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.