Zadanie 1.

Zmienna X ma rozkład o gęstości $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-x}$ określonej na przedziale $(0, \quad \infty)$.

Zmienna losowa Y ma rozkład o gęstości $g(y) = \frac{1}{\sqrt{6 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-3)^2}{6} \right)$ określonej na całej osi liczb rzeczywistych. Kowariancja tych zmiennych wynosi -3 .

Wariancja zmiennej $(X+Y)$ wynosi:

(A) 0

(B) 1.5

(C) 3

(D) 4.5

(E) podane informacje o parze zmiennych losowych są sprzeczne

Zadanie 2.
W urnie znajduje się 10 kul białych i 10 kul czarnych. Wybieramy z urny kolejno, *bez zwracania* po jednej kuli aż do momentu wyciągnięcia po raz pierwszy kuli czarnej. Wartość oczekiwana liczby wyciągniętych białych kul jest równa:

(A) 5

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{10}{11}$

(D) 1

(E) $\frac{19}{20}$

Wskazówka: można uprościć rozwiązanie, wyobrażając sobie iż 20 kul (w tym 10 białych i 10 czarnych) poddanych zostało losowej permutacji

Zadanie 3.
Talia składa się z 52 kart, po 13 kart każdego z 4 kolorów: *trefl, karo, kier, pik.* W każdym kolorze 4 karty to *figury*, zaś pozostałe 9 kart to *blotki*.
Z dobrze potasowanej talii wybieramy kolejno 2 karty *bez zwracania*. Rozważmy następujące zdarzenia losowe:

A_1 = „pierwsza wybrana karta jest *blotką kierową*”
B_1 = „pierwsza wybrana karta jest *blotką treflową*”
C_1 = „pierwsza wybrana karta jest *figurą kierową*”
D_1 = „pierwsza wybrana karta jest *figurą treflową*”
E_1 = „pierwsza wybrana karta jest *pikiem*”
T_2 = „druga wybrana karta jest *treflem*”
K_2 = „druga wybrana karta jest *kierem* lub *figurą treflową*”

Wybierz tę z poniższych relacji, która jest prawdziwa:

(A) $\Pr\left(K_2 \cap T_2 \middle| A_1\right) = \Pr\left(K_2 \middle| A_1\right) \cdot \Pr\left(T_2 \middle| A_1\right)$

(B) $\Pr\left(K_2 \cap T_2 \middle| B_1\right) = \Pr\left(K_2 \middle| B_1\right) \cdot \Pr\left(T_2 \middle| B_1\right)$

(C) $\Pr\left(K_2 \cap T_2 \middle| C_1\right) = \Pr\left(K_2 \middle| C_1\right) \cdot \Pr\left(T_2 \middle| C_1\right)$

(D) $\Pr\left(K_2 \cap T_2 \middle| D_1\right) = \Pr\left(K_2 \middle| D_1\right) \cdot \Pr\left(T_2 \middle| D_1\right)$

(E) $\Pr\left(K_2 \cap T_2 \middle| E_1\right) = \Pr\left(K_2 \middle| E_1\right) \cdot \Pr\left(T_2 \middle| E_1\right)$

Zadanie 4.
Załóżmy, że niezależne zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 mają rozkłady wykładnicze o wartościach oczekiwanych odpowiednio: 1, 2, 3 i 4.
$\Pr\left(X_1 = \min\left\{X_1, X_2, X_3, X_4\right\}\right)$ wynosi:

(A) 0,46

(B) 0,48

(C) 0,50

(D) 0,52

(E) 0,54

Wskazówka zauważ, iż zdarzenie powyższe jest równoważne zdarzeniu, iż pierwsza ze zmiennych przyjęła wartość mniejszą lub równą minimum z trzech pozostałych

Zadanie 5.
O zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ o tej samej wartości oczekiwanej równej μ oraz tej samej wariancji równej σ^2 zakładamy, iż:
$COV\left(X_i, X_j\right) = \rho \cdot \sigma^2$ dla $i \neq j$.
Zmienne losowe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ są nawzajem niezależne oraz niezależne od zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$, i mają rozkłady prawdopodobieństwa postaci:
$\Pr\left(\varepsilon_i = 1\right) = \Pr\left(\varepsilon_i = -1\right) = \frac{1}{2}$.

Wariancja zmiennej losowej $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot X_i$ wynosi:

(A) $n \cdot \left(\mu^2 + \sigma^2\right)$

(B) $n \cdot \left(\mu^2 + \sigma^2 \cdot (1 + \rho)\right)$

(C) $n \cdot \left(\mu^2 + \sigma^2\right) + n \cdot (n-1) \cdot \rho$

(D) $n \cdot \left(\mu^2 + \sigma^2 + (n-1) \cdot \sigma^2 \cdot \rho\right)$

(E) $n \cdot \left(\mu^2 + (n-1) \cdot \sigma^2 \cdot \rho\right)$

Uwaga: chodzi o poprawność wzoru ogólną, tzn. dla dowolnych dopuszczalnych wartości parametrów n, ρ, σ^2, μ.

Zadanie 6.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbką prostą z rozkładu o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{\frac{1}{\theta}-1} & dla \quad x \in (0,1) \\ 0 & dla \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

Jeśli $\hat{\theta}$ jest estymatorem największej wiarogodności nieznanego parametru $\theta > 0$, to jego wariancja wynosi:

(A) $\frac{2 \cdot \theta^2}{n}$

(B) $\frac{\theta}{\sqrt{n}}$

(C) $\frac{\theta^2}{n}$

(D) $2 \cdot \theta^2$

(E) $\frac{(\theta^2 + \theta)}{n}$

Zadanie 7.
$U_1, U_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Obserwujemy pojedynczą zmienną losową *X*, i rozpatrujemy następujące hipotezy:

H_0: X ma rozkład taki, jak $\min\{U_1, U_2, U_3\}$

H_1: X ma rozkład taki, jak $\min\{U_1, U_2\}$

Najmocniejszy test na poziomie istotności $\alpha = \frac{1}{8}$ ma moc równą:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\sqrt[2]{\frac{1}{8}}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 8.
Wykonujemy n rzutów kością do gry i weryfikujemy hipotezę H_0 mówiącą, że kość jest rzetelna - tzn. że każda liczba oczek pojawia się z jednakowym prawdopodobieństwem równym $1/6$. Standardowy test χ^2 na poziomie istotności 0.001 odrzuca hipotezę zerową, jeśli obliczona wartość statystyki χ^2 przekracza 20.515 (kwantyl rzędu 0.999 rozkładu χ^2 z pięcioma stopniami swobody). Przypuśćmy, że wykonaliśmy tylko $n = 6$ rzutów. Jest to zbyt mało, żeby asymptotyczne przybliżenie rozkładu χ^2 było zadowalające. Faktyczny rozmiar testu: „odrzucamy H_0, jeśli wartość statystyki χ^2 przekroczy 20.515” wynosi:

(A) $\frac{1}{6^5}$

(B) $\frac{5}{6^5}$

(C) $\frac{1}{6^4}$

(D) $\frac{5}{6^4}$

(E) $\frac{31}{6^5}$

Zadanie 9.
Dwie niezależne próbki proste: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ pochodzą z tego samego rozkładu normalnego o parametrach (μ, σ^2). Jeden statystyk ma do dyspozycji pierwszą próbkę, drugi zaś drugą próbkę. Obaj statystycy znają wariancję σ^2, żaden nie zna wartości oczekiwanej μ. Każdy z nich buduje na podstawie swojej próbki przedział ufności dla μ na poziomie ufności 0.8. Prawdopodobieństwo, iż przedziały zbudowane przez nich okażą się rozłączne, wynosi:

(A) 0.04

(B) 0.40

(C) 0.02

(D) 0.07

(E) 0.36

Zadanie 10.
Na początku doświadczenia w urnie I znajdują się 3 kule białe, zaś w urnie II - 3 kule czarne. Losujemy po jednej kuli z każdej urny - po czym kulę wylosowaną z urny I wrzucamy do urny II, a tę wylosowaną z urny II wrzucamy do urny I. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Granica (przy $n \to \infty$) prawdopodobieństwa, iż obie kule wylosowane w n-tym kroku są jednakowego koloru, wynosi:

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{4}{10}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{4}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 23 października 1999 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....KLUCZ ODPOWIEDZI...................................

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	B	
4	B	
5	A	
6	C	
7	A	
8	A	
9	D	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.