**Zadanie 1.**
Rzucamy pięcioma kośćmi do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kośćmi, na których nie wypadły szóstki. W trzeciej rundzie rzucamy tymi kośćmi, na których do tej pory nie wypadły szóstki. Prawdopodobieństwo, że po trzech rundach na wszystkich kościach będą szóstki, wynosi (wybierz najbliższą wartość):

(A) 1,20%

(B) 1,33%

(C) 1,50%

(D) 1,66%

(E) 2,00%

**Zadanie 2.**

W każdej z trzech urn znajduje się 5 kul:

- w pierwszej urnie są 4 białe kule i 1 czarna kula,
- w drugiej urnie są 3 białe kule i 2 czarne kule,
- w trzeciej urnie są 2 białe kule i 3 czarne kule.

Wykonujemy trzyetapowe doświadczenie:
etap 1: losujemy (z równymi prawdopodobieństwami) jedną z trzech urn,
etap 2: z wylosowanej w etapie 1 urny ciągniemy 2 kule i odkładamy je na bok,
etap 3: z tej samej urny ciągniemy jedną (z trzech pozostałych w tej urnie) kulę.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia w etapie 3 kuli białej, jeśli w etapie 2 wyciągnęliśmy dwie białe kule, wynosi:

(A) $\frac{5}{18}$

(B) $\frac{6}{18}$

(C) $\frac{7}{18}$

(D) $\frac{8}{18}$

(E) $\frac{9}{18}$

**Zadanie 3.**
Zakładamy, iż oczekiwany roczny koszt obsługi grupy ubezpieczonych jest liniową funkcją liczebności grupy (wielkości nielosowej), co możemy sformalizować następująco:
$E(Y) = ax + b$, gdzie:
$Y$ – roczny koszt obsługi grupy
$x$ – ilość ubezpieczonych w grupie
$a$, $b$– nieznane parametry
Zakłada się ponadto, że $VAR(Y)$ nie zależy od $x$.
Zanotowano roczny koszt obsługi dla czterech grup o różnych liczebnościach:

| liczebność grupy $x$ | 50 | 100 | 200 | 500 |
|---|---|---|---|---|
| Roczny koszt obsługi $Y$ | 2 000 zł | 3 000 zł | 7 000 zł | 9 000 zł |

Do estymacji parametrów $a$, $b$ stosujemy estymator najlepszy wśród wszystkich estymatorów liniowych i równocześnie nieobciążonych. Wyestymowana wartość kosztu stałego (parametru $b$) wynosi:

A) 1,55 tys. zł

(B) 1,80 tys. zł

(C) 2,05 tys. zł

(D) 2,30 tys. zł

(E) 2,55 tys. zł

**Zadanie 4.**
W pewnym portfelu ubezpieczeń samochodowych liczącym 450 ubezpieczonych odnotowano, że w ciągu roku ubezpieczenia:
- 40 ubezpieczonych kobiet uczestniczyło w wypadku
- 30 ubezpieczonych mężczyzn uczestniczyło w wypadku
- 160 ubezpieczonych kobiet nie uczestniczyło w wypadku
- 220 ubezpieczonych mężczyzn nie uczestniczyło w wypadku

Ile wynosi wartość statystyki testu niezależności $\chi^2$ i czy (na poziomie istotności $\alpha$=0,05) istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy o niezależności wystąpienia wypadku od płci ubezpieczonego?

(A) 5,41; należy odrzucić hipotezę o niezależności

(B) 5,41; brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności

(C) 4,59; należy odrzucić hipotezę o niezależności

(D) 4,59; brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności

(E) 4,12; należy odrzucić hipotezę o niezależności

**Zadanie 5.**
Pobieramy próbkę niezależnych realizacji zmiennej losowej o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną równą $\lambda$ (dodatnią). Niestety nasz sposób obserwacji uniemożliwia odnotowanie realizacji o wartości zero. Pobieranie próbki kończymy w momencie, gdy liczebność <u>odnotowanych</u> realizacji wynosi *T*. Tak więc każda z naszych kolejnych odnotowanych realizacji $k_1, k_2, \ldots, k_T$ wynosi co najmniej 1, i nic nie wiemy o tym, ile w międzyczasie pojawiło się (i umknęło z naszego pola widzenia) obserwacji zerowych.

Przyjmijmy dla średniej z próbki oznaczenie: $\bar{k} \doteq \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} k_t$

Estymator parametru $\lambda$ uzyskany Metodą Największej Wiarogodności jest rozwiązaniem (ze względu na niewiadomą $\lambda$) równania:

(A) $\bar{k} = \lambda + 1$

(B) $\bar{k} = \dfrac{\lambda}{e^{\lambda} - 1}$

(C) $\bar{k} = \dfrac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}$

(D) $\bar{k} = \dfrac{2}{2 - \lambda}$

(E) $\bar{k} = \dfrac{6}{6 - 3\lambda + \lambda^2}$

**Zadanie 6.**

Mamy dwie niezależne zmienne losowe: $X$ oraz $Y$. Jedna nich (nie wiadomo która) ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, pozostała zaś ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2.

Iloraz: $\dfrac{E\left(\max\left\{X,Y\right\}\right)}{E\left(\min\left\{X,Y\right\}\right)}$ wynosi:

(A) 2

(B) 2,5

(C) 3

(D) 3,5

(E) 4

**Zadanie 7.**
Mamy dwie niezależne zmienne losowe: $X$ oraz $Y$. Zmienna $X$ ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1, zmienna $Y$ zaś ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 2. Zdefiniujmy nową zmienną $Z$ jako udział zmiennej $X$ w sumie obu zmiennych:

$$Z = \frac{X}{X+Y}.$$

Mediana zmiennej $Z$ wynosi:

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$

**Zadanie 8.**
Niech $(X, Y)$ będzie dwuwymiarową zmienną losową, o wartości oczekiwanej $(\mu_X, \mu_Y)$, wariancji każdej ze współrzędnych równej $\sigma^2$ oraz kowariancji równej $\rho \cdot \sigma^2$. Staramy się obserwować niezależne realizacje tej zmiennej, ale nie w pełni to wychodzi - czasem udaje się zaobserwować jedynie pierwszą lub jedynie drugą ze współrzędnych. Przyjmijmy ważne założenie, iż do „zgubienia" obserwacji (calkowitego, jej pierwszej współrzędnej, lub jej drugiej współrzędnej) dochodzi całkowicie niezależnie od wartości tych obserwacji.
Załóżmy, iż otrzymaliśmy próbkę, zawierającą 20 obserwacji wyłącznie pierwszej współrzędnej, 60 obserwacji całej pary, oraz 20 obserwacji wyłącznie drugiej współrzędnej. Niech teraz:
$\overline{X}$ oznacza średnią z próbki (80-ciu) obserwacji na zmiennej *X*,
$\overline{Y}$ oznacza średnią z próbki (80-ciu) obserwacji na zmiennej *Y*,
$\overline{X-Y}$ oznacza średnią z próbki (60-ciu) obserwacji na różnicy zmiennych $X-Y$;
oraz niech:
$\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)$ oraz $\overline{X-Y}$ oznaczają dwa alternatywne estymatory różnicy $(\mu_X-\mu_Y)$
Estymatory te mają jednakową wariancję o ile:

(A) $\rho = 0$

(B) $\rho = \frac{1}{7}$

(C) $\rho = \frac{2}{7}$

(D) $\rho = \frac{3}{7}$

(E) $\rho = \frac{4}{7}$

**Zadanie 9.**

Niech $\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ będzie próbką $n$ niezależnych realizacji zmiennej losowej $X$ o rozkładzie ciągłym. Oznaczmy tę próbkę po uporządkowaniu (od wartości najmniejszych do największych) przez $\left(X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}\right)$. Budujemy przedział ufności dla mediany zmiennej $X$ o postaci: $U_n = \left(X_2^{(n)}, \quad X_{n-1}^{(n)}\right)$. Oznaczmy przez $n^*$ najmniejszą z tych wartości $n$, dla których prawdopodobieństwo pokrycia mediany przez przedział $U_n$ przekracza 0,95.

$n^*$ wynosi:

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

**Zadanie 10.**
Niech dwuwymiarowa zmienna losowa ma gęstość:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & dla \quad (x,y)\in(0,1)\times(0,1) \\ 0 & dla \quad (x,y)\notin(0,1)\times(0,1) \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo:

$$\Pr\left((X,Y)\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\times\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\right)$$

wynosi:

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{9}{64}$

(D) $\frac{1}{6}$

(E) $\frac{1}{4}$

# Egzamin dla Aktuariuszy z 19 czerwca 1999 r.

## Prawdopodobieństwo i statystyka

### Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .................... KLUCZ ODPOWIEDZI .......................................
Pesel ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | B | |
| 2 | E | |
| 3 | C | |
| 4 | A | |
| 5 | C | |
| 6 | D | |
| 7 | D | |
| 8 | E | |
| 9 | D | |
| 10 | B | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.