Zadanie 1.

Decydent z awersją do ryzyka narażony jest na szkodę X. W tabeli podane są możliwe wartości x szkody X, prawdopodobieństwa ich wystąpienia oraz wysokości odszkodowań wynikające z trzech zaoferowanych decydentowi kontraktów ubezpieczeniowych.

szkoda x	0	10	20	50
$\Pr(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1
$I^{(1)}(x)$	0	5	15	45
$I^{(2)}(x)$	0	6	16	46
$I^{(3)}(x)$	0	8	16	40

Jeśli wszystkie kontrakty oferowane są po cenach równych odpowiadającym im składkom netto, to decydent wybierze kontrakt:

(A) $I^{(1)}$

(B) $I^{(2)}$

(C) $I^{(3)}$

(D) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(2)}$

(E) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(3)}$

Zadanie 2.

Rozważmy następujące ubezpieczenie:

- ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 0,2
- wartość szkody, o ile zajdzie, ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 100zł (bez względu na fakt zaistnienia i wartość innych szkód)
- ubezpieczyciel pokrywa nadwyżkę każdej szkody ponad 100zł, jednak nie więcej niż 75% wartości szkody

Wartość oczekiwana łącznej wypłaty ubezpieczyciela z tego ubezpieczenia wynosi:

(A) $20 \cdot e^{-1} - 5 \cdot e^{-4}$

(B) $20 \cdot e^{-1} - 10 \cdot e^{-4}$

(C) $20 \cdot e^{-1} - 15 \cdot e^{-4}$

(D) $20 \cdot e^{-1} - 20 \cdot e^{-4}$

(E) $20 \cdot e^{-1} - 25 \cdot e^{-4}$

Zadanie 3.
Pojedyncza szkoda Y ma na początku roku ma rozkład Pareto o dystrybuancie:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{10}{10+y}\right)^3 & dla \quad y > 0 \\ 0 & dla \quad y \leq 0 \end{cases}$$

W ciągu roku ceny wzrosły na skutek inflacji o 10%, w efekcie czego pojedyncza szkoda w końcu roku Z ma także rozkład Pareto z tym samym parametrem kształtu, ale ze zmodyfikowaną wartością parametru skali. Jasne jest więc, iż wartość oczekiwana całej szkody wzrośnie także o 10%. Szkoda jednak podlega nieproporcjonalnemu podziałowi.
Reasekurator pokrywa nadwyżkę szkody ponad kwotę $d = 11$ (ustaloną nominalnie, a więc nie ulegającą zmianie w efekcie inflacji). Wartość oczekiwana tej części szkody, którą pokrywa reasekurator, w efekcie inflacji w ciągu roku wzrośnie o:

(A) 10,0%

(B) 12,5%

(C) 15,8%

(D) 18,6%

(E) 21,3%

(*wybierz najbliższą wartość*)

Zadanie 4.
Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona, z częstotliwością równą λ na rok (gdzie λ jest liczbą dodatnią). Jeśli do szkody dochodzi, to wynosi ona zawsze 1. Zaoferowaliśmy ubezpieczenie od pierwszej szkody, ważne przez okres roku. Tym pechowcom, którym szkoda się wydarzy, oferujemy odnowienie pokrycia.
Składkę za odnowienie pokrycia (tzn. pokrycie - ważne do końca roku - ewentualnej szkody $(n+1)$-szej po zajściu szkody n-tej, gdzie $n \geq 1$) wyznaczono wstępnie na poziomie:
$\Pi_t = (1-t) \cdot (1-e^{-\lambda})$,
gdzie liczba $t \in (0, 1)$ jest momentem czasu, w którym dokonujemy odnowienia pokrycia. Wybierz odpowiedź, najtrafniej oddającą stosunek składki Π_t do prawidłowo skalkulowanej składki netto za odnowienie pokrycia.

(A) Π_t równa jest składce netto za odnowienie

(B) Π_t jest niższa od składki netto za odnowienie

(C) Π_t jest wyższa od składki netto za odnowienie

(D) Π_t może być niższa, równa bądź wyższa od składki netto za odnowienie, w zależności od liczby t

(E) Π_t może być niższa, równa bądź wyższa od składki netto za odnowienie, w zależności od liczby λ

Zadanie 5.

Dla pewnego ryzyka ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą 2, a pojedyncza szkoda Y ma rozkład:

$\Pr(Y = 1) = 0{,}5$

$\Pr(Y = 3) = 0{,}5$

Wartość oczekiwana nadwyżki łącznej wartości szkód z tego ryzyka ponad liczbę 3 wynosi:

(A) 1,66

(B) 1,74

(C) 1,82

(D) 1,90

(E) 1,98

(*wybierz najbliższą wartość*)

Zadanie 6.
Portfel ryzyk składa się z dwóch subportfeli. Liczebność subportfeli wynosi odpowiednio:
$n_1 = 1000$, $n_2 = 2000$,
i wszystkie $n_1 + n_2$ ryzyka są niezależne.
Prawdopodobieństwa wystąpienia szkody dla pojedynczego ryzyka (dla każdego może wystąpić co najwyżej jedna szkoda) wynoszą odpowiednio:
$q_1 = 0{,}03$, $q_2 = 0{,}02$.
Wartości szkód w każdym z subportfeli są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych (w ramach subportfela) rozkładach, ze skończonymi w obu przypadkach wariancjami oraz z wartościami oczekiwanymi odpowiednio:
$\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$.
Rozkład prawdopodobieństwa łącznej wartości szkód aproksymujemy złożonym rozkładem Poissona w sposób następujący:

- w każdym z subportfeli rozkład ilości szkód aproksymujemy rozkładem Poissona (zachowując niezmienioną wartość oczekiwaną), a rozkład wartości pojedynczej szkody pozostawiamy bez zmian
- rozkład łącznej wartości szkód z całego portfela otrzymujemy stosując znane twierdzenie o rozkładzie sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie złożonym Poissona każda

Różnica wariancji rozkładu aproksymującego i rozkładu aproksymowanego wynosi:

(A) nie wiadomo ile wynosi, bo brakuje danych

(B) 10,0

(C) 15,8

(D) 21,6

(E) 27,4

Zadanie 7.
Łączna wartość szkód ma złożony rozkład Poissona. Wartość szkody Y jest zawsze liczbą naturalną, a jej rozkład jest postaci:

i	1	2	3	4	5	$i \geq 6$
$\Pr(Y=i)$	0,30	0,20	0,15	0,05	0,05	0,25

O rozkładzie prawdopodobieństwa wartości zagregowanych szkód $f(x)$ wiemy, iż: $f(0)=0{,}05$.
Prawdopodobieństwo, iż zagregowana wartość szkód przekroczy 2, wynosi:

(A) 0,855

(B) 0,868

(C) 0,890

(D) 0,905

(E) nie wiadomo, bo za mało danych

Zadanie 8.
Warunki pewnego ubezpieczenia od nieszczęśliwych wypadków są następujące:
- ubezpieczenie jest jednoroczne ze składką płaconą jednorazowo,
- S - suma ubezpieczenia,
- w przypadku wystąpienia inwalidztwa w następstwie nieszczęśliwego wypadku wypłacane jest świadczenie ubezpieczeniowe w wysokości:
  xS, gdzie:
  x - to orzeczony stopień inwalidztwa, $x \in (0, 1]$, $x = 0$ - brak inwalidztwa, $x = 1$ -
100% inwalidztwo
- w przypadku śmierci z powodu nieszczęśliwego wypadku, jeżeli wcześniej nie zostało orzeczone inwalidztwo, wypłacana jest cała suma ubezpieczenia S,
- w przypadku śmierci w następstwie nieszczęśliwego wypadku, jeżeli wcześniej zostało orzeczone inwalidztwo z tego samego nieszczęśliwego wypadku, wypłacana jest suma ubezpieczenia S lub kwota mniejsza, taka by sumaryczna wypłata z tytułu inwalidztwa i śmierci nie przekraczała 150% sumy ubezpieczenia,
- świadczenie może być wypłacone z tytułu co najwyżej z jednego nieszczęśliwego wypadku.

Znamy następujące prawdopodobieństwa:
- p_A - prawdopodobieństwo, że wystąpi wypadek, w wyniku którego zostanie orzeczone inwalidztwo,
- p_B - prawdopodobieństwo, że wystąpi śmiertelny wypadek (bez wcześniejszego orzeczenia inwalidztwa),
- p_{AB} - prawdopodobieństwo warunkowe zgonu z powodu tego wypadku, z którego wcześniej orzeczono inwalidztwo (pod warunkiem że do takiego orzeczenia doszło) - zakładamy iż nie zależy od orzeczonego stopnia inwalidztwa x
- $f_A(x) = 2 - 2x$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa wystąpienia inwalidztwa w stopniu x, pod warunkiem, że inwalidztwo zostało orzeczone.

Składka netto za to ubezpieczenie, równa wartości oczekiwanej wypłaty świadczeń wynosi:

(A) $S \cdot \left(p_B + \frac{1}{3} p_A + \frac{3}{4} p_A p_{AB} \right)$

(B) $S \cdot \left(p_B + \frac{1}{3} p_A + \frac{5}{6} p_A p_{AB} \right)$

(C) $S \cdot \left(p_B + \frac{1}{3} p_A + \frac{7}{8} p_A p_{AB} \right)$

(D) $S \cdot \left(p_B + \frac{1}{3} p_A + \frac{11}{12} p_A p_{AB} \right)$

(E) $S \cdot \left(p_B + \frac{1}{3} p_A + \frac{23}{24} p_A p_{AB} \right)$

Zadanie 9.
Pewna umowa ubezpieczenia majątkowego została zawarta 1 stycznia 1999 na okres jednego roku. Jednorazowo płatna składka wyniosła 1 200 zł. Koszty akwizycji wynoszą 25%. Wiemy, że dla tego ubezpieczenia szkodowość w wymiarze rocznym wynosi 65%, ale nierówno się rozkłada - mianowicie szkodowość w miesiącach letnich (czerwiec, lipiec, sierpień) jest dziesięciokrotnie wyższa niż w pozostałych miesiącach, w których notuje się jednakową - niską szkodowość.
Suma rezerwy składki i rezerwy na ryzyka niewygasłe na dzień 31 marca 99 dla tej umowy wynosi (przyjmij założenie o równej długości wszystkich miesięcy):

(A) 675 zł

(B) 700 zł

(C) 720 zł

(D) 750 zł

(E) 900 zł

Zadanie 10.
W ciągu pierwszego roku działalności ubezpieczyciel miał następujące wyniki (tys. ECU):

Przypis składki	4 500
udział reasekuratora	*500*
Rezerwa składek	500
Rezerwa szkodowa	500

Margines wypłacalności liczony na bazie składek i na bazie szkód jest identyczny. Jaka jest wartość odszkodowań, jeśli nie było szkód na udziale reasekuratora?

(A) 2 615

(B) 2 630

(C) 2 645

(D) 2 660

(E) 2 675

Egzamin dla Aktuariuszy z 19 czerwca 1999 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	B	
5	B	
6	D	
7	A	
8	E	
9	C	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.