Zadanie 1
W urnie znajduje się 20 kul, w tym 10 kul białych i 10 czarnych. Ciągniemy losowo bez zwracania 18 kul. Niech N oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Wariancja zmiennej losowej N wynosi:

(A) $\frac{13}{19}$

(B) $\frac{12}{19}$

(C) $\frac{11}{19}$

(D) $\frac{10}{19}$

(E) $\frac{9}{19}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 2)$, a zmienna losowa Y ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Zmienne są niezależne.

$\Pr\left(|2Y - X| < \frac{1}{2} \right)$ wynosi:

(A) $\frac{7}{16}$

(B) $\frac{8}{16}$

(C) $\frac{9}{16}$

(D) $\frac{10}{16}$

(E) $\frac{12}{16}$

Zadanie 3.
Mamy trzy niezależne, 10-elementowe próbki proste pobrane z trzech populacji normalnych:

$$\left(X_{i,1}, \dots, X_{i,10}\right) \sim N\left(\mu_i, \sigma^2\right), \qquad i = 1, 2, 3$$

o tej samej (nieznanej) wariancji σ^2.
W każdym z trzech przypadków policzono:

średnią: $\overline{X}_i = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} X_{i,j}$

i wariancję z próbki: $S_i^2 = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{10}\left(X_{i,j} - \overline{X}_i\right)^2$

Uzyskano następujące wyniki:

i	1	2	3
S_i^2	$\frac{15}{9}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{20}{9}$
$\overline{X}_i$	30	31	32

Przeprowadzono testy F analizy wariancji na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla weryfikacji każdej z następujących hipotez:
H_{12}: $\mu_1 = \mu_2$ przeciwko alternatywie: $\mu_1 \neq \mu_2$
H_{23}: $\mu_2 = \mu_3$ przeciwko alternatywie: $\mu_2 \neq \mu_3$
H_{13}: $\mu_1 = \mu_3$ przeciwko alternatywie: $\mu_1 \neq \mu_3$
H_{123}: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ przeciwko alternatywie: „nie wszystkie wartości oczekiwane μ_1, μ_2, μ_3 są równe”
Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) H_{12} oraz H_{23} odrzucone, reszta nie odrzucona

(B) H_{13} odrzucona, reszta nie odrzucona

(C) wszystkie hipotezy odrzucone

(D) H_{123} oraz H_{13} odrzucone, reszta nie odrzucona

(E) wszystkie odrzucone oprócz H_{13}

Zadanie 4.

Niech $\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ będzie próbką *n* niezależnych realizacji z rozkładu o dystrybuancie:

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1-2^{-(x-\theta)} & dla \quad x > \theta \\ 0 & dla \quad x \le \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$ jest nieznanym parametrem.
Rozważmy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy:
$H_0: \theta = 0$ przeciw alternatywie $H_1: \theta > 0$
na poziomie istotności $\alpha = 0.01$.
W danym punkcie $\theta_1 > 0$ funkcja mocy tego testu przybiera wartość większą lub równą 0.64 wtedy i tylko wtedy, gdy liczebność próbki *n* spełnia warunek:

(A) $n \leq \dfrac{7}{\theta_1}$

(B) $n \geq 6 \cdot \theta_1$

(C) $n \geq \dfrac{6}{\theta_1}$

(D) $n \geq \dfrac{\log_2 100}{\theta_1}$

(E) $n \geq \dfrac{7}{\theta_1}$

Zadanie 5.
Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu wynosi p, gdzie $p \in (0,1)$. Powtarzamy doświadczenie aż do momentu, kiedy po raz trzeci nastąpi sukces. Niech N oznacza ilość porażek, które poprzedziły 3-ci sukces. Liczba powtórzeń doświadczenia wynosi więc $(N+3)$. Przy jakiej wartości parametru p zachodzi:
$\Pr(N=1)=\Pr(N=2)$?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 6.
Niech $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ będzie próbką n niezależnych realizacji zmiennej losowej X. Niech $X_{\max}^{(n)}$ oraz $X_{\min}^{(n)}$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą z liczb $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$. Jeśli rozważymy przypadek próbek 2-elementowych oraz 3-elementowych, to zależność:

$$E\left(X_{\max}^{(3)} - X_{\min}^{(3)}\right) = \frac{3}{2} \cdot E\left(X_{\max}^{(2)} - X_{\min}^{(2)}\right)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:
- zmienna losowa X posiada skończoną wartość oczekiwaną, i ponadto:

(A) nic ponadto (żaden dodatkowy warunek nie jest potrzebny)

(B) X ma rozkład określony na półosi nieujemnej - tzn. $\Pr(X < 0) = 0$

(C) X ma rozkład wykładniczy

(D) X ma rozkład jednostajny na pewnym przedziale

(E) X ma rozkład zdegenerowany do punktu

Zadanie 7.

Zmienna losowa *X* ma rozkład warunkowy dany gęstością:

$$f_{X/\Lambda=\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x} & dla \quad x>0\\ 0 & dla \quad x\le 0\end{cases}$$

Natomiast rozkład brzegowy zmiennej losowej Λ dany jest gęstością:

$$f_{\Lambda}(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{-\beta x} & dla \quad x>0\\ 0 & dla \quad x\le 0\end{cases}$$

Jeśli parametry drugiego z rozkładów wynoszą $(\alpha,\beta)=(2,2)$, to mediana z rozkładu bezwarunkowego (brzegowego) zmiennej *X* wynosi:

(A) 1,086

(B) 1,000

(C) 0,914

(D) 0,828

(E) 0,742

Zadanie 8.
Dla $t = 1, 2, \dots, T$ obserwujemy niezależne realizacje zmiennej losowej X_t, o których zakładamy iż pochodzą z rozkładu o parametrach:

$$E(X_t) = n_t \cdot \mu$$

$$VAR(X_t) = n_t \cdot \sigma^2,$$

gdzie wartości $(n_1, n_2, \dots, n_T)$ są nam znane (i dodatnie), natomiast parametry μ oraz σ^2 są nieznane. Wybieramy estymator parametru σ^2 z klasy estymatorów postaci:

$$c \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{\left(X_t - n_t \overline{X}\right)^2}{n_t},$$

gdzie:

$$\overline{X} \doteq \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{n},$$

$$n \doteq \sum_{t=1}^{T} n_t,$$

i gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą (parametrem konkretnego estymatora).
Otrzymamy estymator nieobciążony, jeśli przyjmiemy stałą c równą:

(A) $\dfrac{n}{T \cdot n}$

(B) $\dfrac{n}{T \cdot n - 1}$

(C) $\dfrac{n}{T \cdot n - T}$

(D) $\dfrac{n}{T \cdot n - n}$

(E) $\dfrac{n}{T \cdot n - T - n}$

Zadanie 9.
Mamy dwie niezależne obserwacje: x_1 oraz x_2 z rozkładu normalnego, przy czym jedna z nich pochodzi z rozkładu o parametrach (μ, σ^2), a druga z rozkładu o parametrach $(2\mu, 2\sigma^2)$. Niestety zgubiliśmy informację, która z obserwacji z którego z rozkładów pochodzi. Parametry (μ, σ^2) są nieznane. W tej sytuacji wybieramy estymator parametru σ^2 z klasy estymatorów postaci:
$\sigma^2 = a \cdot (x_1 - x_2)^2 + b \cdot (x_1 + x_2)^2$,
gdzie (a, b) to para liczb rzeczywistych (parametry konkretnego estymatora).
Otrzymamy estymator nieobciążony, jeśli przyjmiemy:

(A) $a = \frac{1}{3}, \quad b = 0$

(B) $a = \frac{3}{8}, \quad b = -\frac{1}{24}$

(C) $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{18}$

(D) $a = \frac{7}{12}, \quad b = -\frac{1}{4}$

(E) $a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{2}{27}$

Zadanie 10.
Za pomocą testu zgodności χ^2 testowano hipotezę, iż n-elementowa próbka pochodzi z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej równej jeden. Mamy niepełną informację o próbce, na podstawie której przeprowadzono test:

k	0	1	2	3 lub więcej
Ilość obserwacji w próbce, które przyjęły wartość k	n-70-40-25	70	40	25

Podaj najmniejszą możliwą liczebność próbki n, jeśli wiadomo, iż na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie znaleziono podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności.

(A) 194

(B) 195

(C) 196

(D) 197

(E) 198

Egzamin dla Aktuariuszy z 27 marca 1999 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	C	
3	D	
4	C	
5	C	
6	A	
7	D	
8	D	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.