Zadanie 1

Wartość zakładu produkującego fajerwerki wynosi 3 mln zł. Właściciel posiada ponadto majątek o wartości w zainwestowany w aktywa nie obarczone ryzykiem. Prawdopodobieństwo iż dojdzie do eksplozji w zakładzie wynosi 0,01. Eksplozja (o ile nastąpi) spowoduje całkowite zniszczenie zakładu, a ponadto obciąży pozostały majątek właściciela roszczeniami innych poszkodowanych. Rozkład łącznej wartości szkód obu rodzajów (w mln zł) dany jest funkcją gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2(x-3)} & \text{dla} \quad x > 3 \\ 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Funkcja użyteczności (majątku wyrażonego w mln zł) opisująca preferencje właściciela fabryki ma postać:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x > w \\ w + 1 - e^{-(x-w)} & \text{dla} \quad x \le w \end{cases}$$

Spośród poniżej przedstawionych wartości składki za ubezpieczenie od łącznej szkody obu rodzajów, wybierz największą którą właściciel byłby skłonny zapłacić.

(A) Za mało danych

(B) 0,0350

(C) 0,0369

(D) 0,0386

(E) 0,0400

Zadanie 2
Dla pewnego ubezpieczenia, w roku 1998 wartość szkody ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1000)$. Udział własny ubezpieczonego w szkodzie wynosi 20% wartości szkody, jednak nie więcej niż 100. W wyniku inflacji wysokość szkód w roku 1999 wzrośnie, jak przypuszczamy, o $i = 10\%$. Udział własny ubezpieczonego w szkodzie pozostaje taki sam jak w roku 1998 (tj., odpowiednio, 20% lub 100).
O ile wzrośnie wartość oczekiwana wypłaty? Podaj wartość najbliższą.

(A) 10,00%

(B) 10,27%

(C) 10,54%

(D) 11,23%

(E) 12,03%

Zadanie 3
Łączna wartość szkód ma złożony rozkład Poissona z częstotliwością $\lambda = 4$ i rozkładem wartości pojedynczej szkody Y danym wzorem:

$\Pr(Y = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots$.

$E(\max[0, X - 3])$ wynosi:

(A) $5 + 8e^{-4}$

(B) $5 + 9e^{-4}$

(C) $5 + 10e^{-4}$

(D) $5 + 11e^{-4}$

(E) $5 + 12e^{-4}$

Zadanie 4

Firma ubezpieczeniowa specjalizująca się w ubezpieczeniach dla dużego przemysłu prowadzi swą działalność w 4 różnych gałęziach przemysłu. Charakterystyka ubezpieczeń w podziale na poszczególne gałęzie jest następująca:

Gałąź przemysłu	Wysokość szkody	Prawdopodobieństwo szkody	Ilość polis
1	1 mln	0,01	100
2	10 mln	0,02	50
3	20 mln	0,005	200
4	x	0,002	500

gdzie x jest pewną (nielosową) liczbą większą od 30 mln.

Dla każdej z gałęzi przemysłu został policzony względny narzut bezpieczeństwa (*relative security loading*), w taki sposób by wartość wypłaconych szkód z prawdopodobieństwem 0,8 nie przewyższała zebranych składek w tej gałęzi. W każdym przypadku posłużono się aproksymacją rozkładem normalnym.

Dla której z gałęzi przemysłu względny narzut bezpieczeństwa jest największy?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) Za mało danych

Zadanie 5

Dla dyskretnego procesu nadwyżki U_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$

- $W_n = U_n - U_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
- o procesie W_n wiemy, że:
  - jest stacjonarnym procesem Markowa
  - może przyjmować wartości -1 , 0 , 1.
  - $E(W_n) = 0{,}4$
  - $VAR(W_n) = 0{,}44$

Wyznacz współczynnik dopasowania $\tilde{R}$. Podaj najbliższą wartość.

(A) 1,39

(B) 1,61

(C) 1,79

(D) 1,95

(E) 2,08

Zadanie 6

Przyjmijmy, że jest dzisiaj 30 listopada 1998 roku. Analizujemy ilość szkód w pewnym ubezpieczeniu. Ilość szkód możemy opisać procesem stochastycznym $\{N(t), t \geq 0\}$, $N(t)$ oznacza ilość szkód jaka zaszła od 1 stycznia 1998 do czasu t. Proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ma następujące własności:

- czasy pomiędzy następującymi po sobie szkodami mają identyczne rozkłady prawdopodobieństwa, jest to rozkład jednostajny na odcinku $[0, 3]$, jednostką czasy jest 1 rok;
- pomiędzy 1 stycznia 1998 a 30 listopada 1998 wystąpiło 5 szkód; $N(\frac{11}{12}) = 5$;
- piąta szkoda wystąpiła dnia 30 czerwca 1998; $T(5) = \frac{6}{12}$;

Dla uproszczenia przyjmijmy, że każdy miesiąc ma 30 dni, a rok 360 dni.

Oblicz prawdopodobieństwo, że następna szkoda wystąpi w miesiącu grudniu 1998 lub styczniu 1999. Podaj najbliższą wartość.

(A) mamy zbyt mało danych o procesie $\{N(t), t \geq 0\}$.

(B) 0,056

(C) 0,065

(D) 0,080

(E) 0,167

Zadanie 7

Firma transportowa posiadająca 2 samochody, prowadząca swoją działalność w regionie o bardzo dużym ryzyku, postanowiła wykupić specjalne ubezpieczenie Auto-Casco na te dwa pojazdy. Kontrakt ubezpieczeniowy przewiduje wypłatę dywidendy. Dywidenda jest równa:

50%*[zapłacona składka minus (wypłacone odszkodowania + koszty administracyjne + koszty reasekuracji)], jeżeli ta wartość jest dodatnia.

Dane:

- składka za dwa pojazdy wynosi 4;
- koszty administracyjne wynoszą 10% składki;
- reasekuracja jest typu *excess of loss* z zachowkiem równym 2; reasekurator skalkulował składkę w wysokości składki netto z narzutem 25%
- każdy z pojazdów może mieć tylko jedną szkodę; rozkład prawdopodobieństwa wypłaty za jeden pojazd ma postać:

  $p(0) = 0{,}4$

  $p(1) = 0{,}3$

  $p(2) = 0{,}2$

  $p(4) = 0{,}1$
- wypłaty dla poszczególnych pojazdów są niezależne;

Ile wynosi wartość oczekiwana dywidendy? Podaj najbliższą wartość.

(A) 0,612

(B) 0,644

(C) 0,688

(D) 0,712

(E) 0,744

Zadanie 8

Wartość szkody w danej grupie ryzyk jest opisywana rozkładem gamma o parametrach
α,
$\beta = 0{,}001$.

Zróżnicowanie grup jest opisywane rozkładem prawdopodobieństwa parametru α, który to rozkład jest rozkładem gamma o średniej 5 i wariancji 5.

Zaobserwowaliśmy 9 szkód pochodzących z jednej grupy ryzyk. Wartość średnia tych szkód wyniosła 3000.

Korzystając z klasycznego modelu Bühlmanna dla optymalnego niehomogenicznego liniowego estymatora, znajdź wartość oczekiwaną następnej szkody. Podaj najbliższą wartość.

(A) 3000

(B) 3200

(C) 4000

(D) 4800

(E) 5000

Zadanie 9
Pewien portfel ryzyk składa się z dwóch subportfeli. Dla każdego subportfela może wystąpić co najwyżej jedna szkoda na ryzyko, a jeśli wystąpi, to ma rozkład równomierny na przedziale (0, a).

Subportfel	Prawdopodobieństwo zajścia szkody	Liczba ryzyk w subportfelu	Parametr a
1	0,3	1000	100
2	0,1	5000	50

Łączną szkodę aproksymujemy złożonym rozkładem Poissona o parametrach $(\lambda,\ F(\cdot))$, gdzie uproszczenie polega na zastąpieniu w każdym subportfelu dwumianowego rozkładu ilości szkód przez rozkład Poissona o tej samej wartości oczekiwanej.
$F(30)$ wynosi:

(A) 0,327

(B) 0,375

(C) 0,450

(D) 0,488

(E) 0,550

Zadanie 10.
W ciągu pierwszych pięciu lat działalności ubezpieczyciel osiągnął następujące wyniki (tys. ECU):

	1993	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
Przypis składki		8 000	13 000		25 000
Udział reasekuratora		2 000		4 300	
Odszkodowania	1 200		9 000	16 000	16 400
Udział reasekuratora		1 000	2 250		4 100
Rezerwa składek	900	1 000	2 000	2 400	
Udział reasekuratora	225	250		600	738
Rezerwa szkód	500	3 000		7 000	15 000
Udział reasekuratora	125	750	1 500	1 750	
Margines wypłacalności	567	1 080	1 710		3 325

Udział w reasekuratora w rezerwie szkodowej na koniec ostatniego roku wynosi:

(A) 3 050

(B) 3 100

(C) 3 150

(D) 3 200

(E) Brak danych do udzielenia odpowiedzi

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 grudnia 1998 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	D	
3	C	
4	D	
5	B	
6	C	
7	B	
8	B	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.