**Zadanie 1.** Ubezpieczyciel tworzy na koniec roku rezerwę składki i rezerwę na pokrycie ryzyk niewygasłych w trzech grupach ubezpieczeń, wykonując obliczenia dla każdej z grup z osobna. We wszystkich trzech grupach umowy zawarto w połowie roku. Dla uproszczenia przyjmujemy, że rok trwa 360 dni. Rezerwa składki tworzona jest w sposób typowy – nie jest więc oparta na rzadko stosowanej, a dopuszczanej przez przepisy „relacji do stopnia ryzyka". W tabeli podane są koszty akwizycji i szkodowość w relacji do składki przypisanej.

| Grupa | Składka przypisana | Koszty akwizycji | Szkodowość | Czas trwania umowy |
|---|---|---|---|---|
| Pierwsza | 120 tys.zł | 10% | 120% | 240 dni |
| Druga | 150 tys.zł | 15% | 90% | 360 dni |
| trzecia | 200 tys.zł | 20% | 80% | 180 dni |

Stosunek łącznej rezerwy składki do łącznej rezerwy na pokrycie ryzyk niewygasłych wynosi:

(A) 5.21

(B) 6.33

(C) 7.71

(D) 8.15

(E) 11.38

**Zadanie 2.** Po pierwszym roku działalności ubezpieczyciel ma następujące wyniki:

| | |
|---|---|
| Przypis składki | 4 200 tys. ECU |
| Odszkodowania brutto | 1 500 tys. ECU |
| Rezerwa składki | 900 tys. ECU |
| Rezerwa szkodowa | 500 tys. ECU |

Różnica między marginesem wypłacalności liczonym na podstawie składek, a marginesem wypłacalności liczonym na podstawie odszkodowań wynosi 168 tysięcy ECU.
Współczynnik reasekuracyjny wynosi:

(A) 68.7%

(B) 69.8%

(C) 70.4%

(D) 71.2%

(E) 72.5%

**Zadanie 3.** W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością $\lambda$ parametru ryzyka $\Lambda$ generuje szkody w ilości $N_t$:

$$\Pr\left(N_t = k_t \middle| \Lambda = \lambda\right) = \frac{\lambda^{k_t}}{k_t!} \cdot e^{-\lambda}, \quad t = 1, 2\,;$$

przy czym:

$$\Pr\left(N_1 = k_1 \wedge N_2 = k_2 \middle| \Lambda = \lambda\right) = \Pr\left(N_1 = k_1 \middle| \Lambda = \lambda\right) \cdot \Pr\left(N_2 = k_2 \middle| \Lambda = \lambda\right).$$

Efekt losowania ubezpieczonego z populacji potencjalnych ubezpieczonych opisuje rozkład:

$$f_\Lambda(x) = \begin{cases} 10 \cdot e^{-10\cdot x} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0 \end{cases}$$

W efekcie doświadczenia dwuetapowego (wylosowanie ubezpieczonego, następnie wygenerowanie przez niego szkód w ilości $N_1$ i potem $N_2$, $COV(N_1, N_2)$ wynosi:

(A) –0.02

(B) –0.01

(C) 0

(D) 0.01

(E) 0.02

**Zadanie 4.** O łącznej wartości szkód $X$ z pewnego kontraktu ubezpieczeniowego wiemy, iż:

- jest nieujemna, tzn. $\Pr(X \geq 0) = 1$;
- ma wartość oczekiwaną równą 20;
- wartość oczekiwana nadwyżki ponad 10 wynosi 13, tzn.: $E[(X-10)_+] = 13$
- wartość szkód jest mniejsza od 10 z prawdopodobieństwem 0.5.

Zbiór wszystkich możliwych wartości $E[(X-5)_+]$ to przedział:

(A) $[15.5, \quad 16.0)$

(B) $[15.5, \quad 16.5)$

(C) $[15.0, \quad 16.0)$

(D) $[15.0, \quad 16.5)$

(D) $[15.0, \quad 15.5)$

**Zadanie 5.** Rozkład wartości szkody $Y$ określony jest na zbiorze liczb naturalnych. W tabeli podane są wartości oczekiwane nadwyżki szkody ponad $d$ dla kolejnych (naturalnych) liczb $d$:

| $d$ | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $E\left[(Y-d)_+\right]$ | 2.42 | 2.10 | 1.85 | 1.65 |

Wartość $\Pr(Y=8)$ wynosi:

(A) 0.32

(B) 0.25

(C) 0.15

(D) 0.07

(E) 0.05

**Zadanie 6.** Portfel składa się z 2000 niezależnych, identycznych ryzyk. Dla każdego z nich ilość szkód ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.05, a wartość szkody ma zawsze (niezależnie od ilości i wartości ewentualnych innych szkód) rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$.
Uznano, iż rozkład łącznej wartości szkód z portfela ma zbyt wysoki wskaźnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześcianu odchylania standardowego). Rozważa się odstąpienie reasekuratorowi nadwyżki każdej szkody z portfela ponad *d*.

Wskaż taką wartość $d \in (0, 1)$, dla której wskaźnik skośności wyniesie 0.1

(A) 0.8

(B) 0.6

(C) 0.4

(D) 0.2

(E) takie $d \in (0, 1)$ nie istnieje

**Zadanie 7.** Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie ze złożonym procesem Poissona, z częstotliwością 0.2 rocznie; wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy z niezmienną w czasie wartością oczekiwaną równą 5 tysięcy złotych.
Odstępy w czasie między momentami zajścia szkód a momentami wypłaty odpowiadających im odszkodowań są także niezależnymi (nawzajem oraz od przebiegu złożonego procesu Poissona) zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym, z wartością oczekiwaną równą 0.5 roku.
Składka za ubezpieczenie pełne od tego ryzyka na okres roku płatna jest jednorazowo z góry. Niech $i$ oznacza efektywną stopę procentową (roczną), a $d$ oraz $\delta$ odpowiednio efektywną stopę dyskonta i natężenie oprocentowania. Składka równa zdyskontowanym oczekiwanym wypłatom odszkodowań wynosi:

(A) $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{2}{2+\delta}$

(B) $1000 \cdot \frac{d}{\delta} \cdot \frac{1}{1+\delta}$

(C) $1000 \cdot (1-d)$

(D) $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot (1-d)$

(E) $1000 \cdot \frac{\delta}{i} \cdot \sqrt{1-d}$

**Zadanie 8.** Niech $X_i$ oznacza wypłatę ubezpieczyciela z $i$-tego ryzyka, a $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ łączną wartość wypłat z portfela składającego się z $n$ niezależnych ryzyk. Wiadomo, że jeśli rozkład zmiennej $S$ daje się dobrze aproksymować rozkładem normalnym, to łączna składka dana wzorem:

$$\Pi(S)=E(S)+1.645\cdot\sqrt{VAR(S)}$$

zapewnia, iż prawdopodobieństwo poniesienia straty wynosi 0.05. Załóżmy, iż wczoraj sprzedaliśmy pokrycie wszystkich ryzyk składających się na portfel $S$ w zamian za składkę w wysokości zgodnej z powyższym wzorem.

Dziś zgłosiło się do ubezpieczenia ryzyko $(n+1)$-sze. Zakładamy, iż jest ono niezależne od innych ryzyk, oraz że po dołączeniu tego ryzyka do portfela aproksymacja rozkładem normalnym jest nadal uprawniona (w szczególności zakładamy, iż wariancja dodatkowego ryzyka jest mała w stosunku do wariancji całego portfela).

Chcemy, aby nadal spełniony był ten sam postulat bezpieczeństwa, a więc aby:

$$\Pr(S+X_{n+1}>\Pi(S)+\Pi(X_{n+1}))=0.05.$$

Która z poniższych formuł składki za ryzyko $(n+1)$-sze najlepiej przybliża spełnienie tego postulatu?

(A) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\sqrt{VAR(X_{n+1})}$

(B) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot VAR(X_{n+1})$

(C) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{\sqrt{VAR(S)}}$

(D) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot 2\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{\sqrt{VAR(S)}}$

(E) $\Pi(X_{n+1})=E(X_{n+1})+1.645\cdot\dfrac{VAR(X_{n+1})}{2\cdot\sqrt{VAR(S)}}$

**Zadanie 9.** W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym składka należna za rok wynosi 2, a rozkład łącznej wartości szkód za *n*-ty rok $W_n$ dany jest dla każdego *n* wzorem:

$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$

gdzie $p = 1 - q$,

i gdzie zakładamy iż $p > \frac{1}{3}$,

oraz iż $W_1, W_2, \dots$ są nawzajem niezależne.

W tym modelu współczynnik przystosowania (*adjustment copefficient*) *R* wynosi:

(A) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{5pq}}{2p}\right)$

(B) $\ln\left(\dfrac{p + \sqrt{5pq}}{2q}\right)$

(C) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{2 - 2q^2}}{2p}\right)$

(D) $\ln\left(\dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2q}\right)$

(E) $\ln\left(\dfrac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2p}\right)$

**Zadanie 10.** Zakładamy ten sam model, co w zadaniu 9, tzn:
model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym, ze składką należną za rok wynoszącą 2, i rozkładem łącznej wartości szkód za *n*-ty rok $W_n$ danym dla każdego *n* wzorem:

$$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $p = 1 - q$,

i gdzie zakładamy iż $p > \frac{1}{3}$,

oraz iż $W_1, W_2, \ldots$ są nawzajem niezależne.

W modelu tym przyjmujemy wartość parametru *p* równą 0.5, oraz wartość nadwyżki początkowej równą 1. Prawdopodobieństwo ruiny (w nieskończonym horyzoncie czasowym) wynosi:

(A) $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{4}$

(B) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{4}$

(C) $\frac{7 - 6\sqrt{5}}{4}$

(D) $\frac{14 - 3\sqrt{5}}{4}$

(E) $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$

# Egzamin dla Aktuariuszy z 3 października 1998 r.

## Matematyka ubezpieczeń majątkowych

### Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ...................... KLUCZ ODPOWIEDZI .........................

Pesel ...........................................

| Zadanie nr | Odpowiedź | Punktacja♦ |
|---|---|---|
| 1 | B | |
| 2 | D | |
| 3 | D | |
| 4 | B | |
| 5 | D | |
| 6 | E | |
| 7 | A | |
| 8 | E | |
| 9 | D | |
| 10 | E | |
| | | |

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.