Zadanie 1. W urnie znajduje się początkowo 10 kul białych i 10 kul czarnych. Doświadczenie polega na kolejnym, 10-krotnym losowaniu bez zwracania po jednej kuli. Rozważmy zdarzenia losowe A_1, A_2 oraz A_3 określone w taki sposób:

A_1 - „w pierwszych 4-ch losowaniach pojawią się 2 kule białe i 2 czarne”
A_2 - „w pierwszych 6-ciu losowaniach pojawią się 3 kule białe i 3 czarne”
A_3 - „w ostatnich 4-ch losowaniach pojawią się 2 kule białe i 2 czarne”

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

(A) $\Pr(A_1 \cap A_3 | A_2) = \Pr(A_1 | A_2) \cdot \Pr(A_3 | A_2)$

(B) $\Pr(A_2 \cap A_3 | A_1) = \Pr(A_2 | A_1) \cdot \Pr(A_3 | A_1)$

(C) $\Pr(A_2 \cap A_3) = \binom{10}{3}^2 \cdot \binom{20}{6}^{-1} \cdot \binom{10}{2}^2 \cdot \binom{20}{4}^{-1}$

(D) $\Pr(A_3 | A_1 \cap A_2) = \Pr(A_3 | A_1)$

(E) $\Pr(A_3) = \Pr(A_2)$

Zadanie 2. Niech $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Zmienna losowa N oznacza numer pierwszej ze zmiennych $X_1, \dots, X_n, \dots$, która jest większa niż X_0:
$N = \inf\{k: \quad k \in \{1, 2, 3, \dots\} \, oraz \; X_k > X_0\}$.
$E(X_N - X_0)$ wynosi:

(A) $\dfrac{1}{N+1}$

(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1-X_0}{2}$

(D) $\dfrac{1}{4}$

(E) $\dfrac{1}{3}$

Zadanie 3. Zmienne losowe U oraz V mają łączną gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(u, v) = \begin{cases} 4/\pi & dla \quad u \geq 0, v \geq 0 \ i \ \ u^2 + v^2 \leq 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ \ przypadku \end{cases}$$

Niech $X = \dfrac{U^2}{U^2 + V^2}$. Zmienna losowa X ma rozkład:

A) beta $Be(0.5, \ 0.5)$

(B) o gęstości $g(x) = 2x$ dla $0 \leq x \leq 1$

(C) beta $Be(2, 2)$

(D) o gęstości $g(x) = (2/\pi) \cdot (1 + x^2)^{-1}$ dla $x \geq 0$

(D) jednostajny na przedziale $(0, 1)$

Uwaga: rozkład beta $Be(\alpha, \ \beta)$ ma z definicji gęstość

$$g(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha - 1} \cdot (1 - x)^{\beta - 1} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Zadanie 4. Wykonano n doświadczeń zgodnie ze schematem Bernoulli'ego, z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 1/3$. Liczba n doświadczeń jest nieznanym parametrem. Okazało się, że liczba porażek jest o 4 większa, niż liczba sukcesów. Wartość estymatora największej wiarygodności $\hat{n}$ parametru n wyniosła:

(A) 12

(B) 8

(C) 7

(D) 6

(E) 4

Zadanie 5. Wiadomo, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ jest prostą próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu - \theta, 1)$, zaś $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ jest niezależną próbą z rozkładu $N(\mu + \theta, 1)$. Liczby μ i θ są nieznanymi parametrami. Rozpatrujemy zadanie testowania hipotezy:

$H_0: \quad \theta = 0$

przeciw alternatywie:

$H_1: \quad \theta = \frac{1}{2}$.

Dla jakich n można skonstruować test na poziomie istotności 0.05 o mocy przynajmniej 0.95?

(A) Wtedy i tylko wtedy, gdy $11 \le n \le 22$

(B) Wtedy i tylko wtedy, gdy $n \ge 11$

(C) Wtedy i tylko wtedy, gdy $n \ge 22$

(D) Wtedy i tylko wtedy, gdy $n \ge 6$

(E) Wtedy i tylko wtedy, gdy $n \ge 100$

Zadanie 6. Zakładamy, że X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 jest prostą próbą losową z rozkładu o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1} & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\theta > 0$ jest nieznanym parametrem.

Chcemy skonstruować przedział ufności $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ dla parametru θ (na poziomie $1-\alpha = 0.90$) tak, żeby:

$\Pr_\theta(\overline{\theta} < \theta) = 0.05 = \Pr_\theta(\underline{\theta} > \theta)$.

Który z podanych poniżej przedziałów ma żądane własności?

Uwaga: stosujemy oznaczenie $S = -\sum_{i=1}^{5} \ln(X_i)$

(A) $\left[\frac{3.94}{S}, \ \frac{18.31}{S}\right]$

(B) $\left[\frac{1.15}{2 \cdot S}, \ \frac{11.07}{2 \cdot S}\right]$

(C) $\left[\frac{3.94}{2 \cdot S}, \ \frac{18.31}{2 \cdot S}\right]$

(D) $\left[\frac{1.15}{S}, \ \frac{11.07}{S}\right]$

(E) $[3.94 \cdot S, \ \ 18.31 \cdot S]$

Zadanie 7. Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma^2)$. Niech:
$Y = X_1 + \cdots + X_{15}$ i $Z = X_6 + \cdots + X_{20}$.
Warunkowa wartość oczekiwana $E(Z|Y)$ wynosi:

(A) 15μ

(B) 5μ

(C) $\frac{2}{3} \cdot Y$

(D) $20\mu - \frac{1}{3} \cdot Y$

(E) $\frac{2}{3} \cdot Y + 5\mu$

Zadanie 8. Łańcuch Markowa ma dwa stany: E_1, E_2 i macierz przejścia: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

Niech X_n oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu *n* kroków $(n = 0, 1, \ldots)$. Funkcję *f* na zbiorze stanów określamy wzorem:

$f(E_i) = i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2$.

Niech $c = \lim_{n\to\infty} COV\left[f(X_n), f(X_{n+1})\right]$.

Granica *c* wynosi:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $-\frac{1}{9}$

(C) Wartość *c* zależy od początkowego stanu łańcucha

(D) 0

(E) 1

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu o gęstości:

$$f_{c,\mu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x-c}{\mu}} & dla \quad x \geq c \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Gdzie $c \in R$ i $\mu > 0$ są nieznanymi parametrami. Który z podanych wzorów określa nieobciążony (dla dowolnego $n > 1$) estymator parametru μ ?

(A) $\hat{\mu} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{n-1} \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

(B) $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

(C) $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{n-1} \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

(D) $\hat{\mu} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

(E) Nie istnieje nieobciążony estymator parametru μ

Zadanie 10. Zakładamy, że $X_1, X_2, \dots, X_n$ jest prostą próbą losową z rozkładu normalnego $N\left(\mu, \ \gamma^2\mu^2\right)$, gdzie $\mu \in R$ jest nieznanym parametrem, zaś γ^2 - znanym współczynnikiem. Poszukujemy estymatora parametru μ postaci:

$\hat{\mu} = c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n$,

który ma jednostajnie (to znaczy dla każdego μ) najmniejszy błąd średniokwadratowy

$E_\mu (\hat{\mu} - \mu)^2$

(wśród estymatorów rozpatrywanej postaci).

(A) Nie ma takiego estymatora.

(B) Taką własność ma $\hat{\mu} = \overline{X}$, czyli estymator dla którego $c_1 = \cdots = c_n = \dfrac{1}{n}$

(C) Taką własność ma estymator dla którego $c_1 = \dfrac{1}{n+\gamma^2}$, $c_2 = \dfrac{1}{n+2\gamma^2}$, $c_3 = \dfrac{1}{n+3\gamma^2}$, ... , $c_n = \dfrac{1}{n+n\gamma^2}$.

(D) Taką własność ma estymator dla którego $c_1 = \cdots = c_n = \dfrac{1}{n+\gamma^2}$

(E) Taką własność ma estymator dla którego $c_1 = \cdots = c_n = \dfrac{1}{n\cdot\left(1+\gamma^2\right)}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 28 lutego 1998 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	D	
3	D	
4	B	
5	C	
6	C	
7	E	
8	B	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.