Zadanie 1. Rzucamy 3 kości do gry (uczciwe). Prawdopodobieństwo zdarzenia iż otrzymamy dwie różne liczby oczek (jedna z nich wystąpi na jednej z kości, druga na dwóch pozostałych kościach) wynosi:

(A) $\frac{12}{36}$

(B) $\frac{15}{36}$

(C) $\frac{16}{36}$

(D) $\frac{18}{36}$

(E) $\frac{24}{36}$

Zadanie 2. Mamy 5 urn, a w każdej z nich po 4 kule. W pierwszej i drugiej urnie skład kul jest taki sam: 1 czarna i 3 białe. W trzeciej urnie są 2 czarne i 2 białe kule, w czwartej urnie 3 czarne i 1 biała, a w piątej urnie 4 czarne. Wykonujemy 3-etapowe doświadczenie:

- losujemy urnę (p-stwo wylosowania każdej z pięciu urn jest takie samo)
- z wylosowanej urny losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok
- z tej samej urny losujemy następną kulę

Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli w trzecim etapie pod warunkiem, iż w drugim etapie wylosujemy kulę czarną wynosi:

(A) $\frac{11}{38}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{10}{19}$

(E) $\frac{20}{33}$

Zadanie 3. Wiadomo, iż dla każdej zmiennej losowej X posiadającej skończone momenty do czwartego rzędu włącznie zachodzi nierówność:

$$E\left[(X-EX)^4\right] \geq \left\{E\left[(X-EX)^2\right]\right\}^2$$

Lewa strona tej nierówności równa jest prawej:

(A) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład zdegenerowany do jednego punktu

(B) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład dwupunktowy z prawdopodobieństwem w każdym z punktów równym 0.5

(C) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład dwupunktowy

(D) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład taki jak w odp.(B) lub jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach takich jak w (B)

(E) wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład taki jak w odp.(C) lub jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach takich jak w (C)

Zadanie 4. Zmienna losowa *N* ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(N=k)=\begin{cases} p_0 & dla \quad k=0 \\ \dfrac{1-p_0}{e^{\lambda}-1}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!} & dla \quad k=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

gdzie parametry rozkładu $p_0 \in (0,1)$ oraz $\lambda > 0$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:

(A) $\lambda \cdot (1-p_0)\cdot \dfrac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}$

(B) $\lambda \cdot (1-p_0)$

(C) $\lambda \cdot \dfrac{1-p_0 e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}$

(D) $\dfrac{2\lambda - p_0}{e^{\lambda}-1}$

(E) $\dfrac{2\lambda - p_0}{1-e^{-\lambda}}$

Zadanie 5. $(X_1, X_2, \ldots, X_{20})$ jest prostą próbą losową z rozkładu normalnego o parametrach (μ, σ^2) równych $(10, 0.1^2)$. Jeśli wiadomo, że $\Pr\left(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_{20}\} \le a\right) = 0.99$, to liczba *a* wynosi:

(A) 14.653

(B) 10.329

(C) 13.291

(D) 16.581

(E) 10.233

Zadanie 6. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Rozważmy zmienną losową równą bezwzględnej wartości różnicy pierwotnych zmiennych X_1 i X_2. Wartość oczekiwana μ oraz wariancja σ^2
zmiennej $|X_1 - X_2|$ wynoszą:

(A) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{18}$

(B) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

(C) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{24}$

(D) $\mu = \frac{1}{3}$ $\sigma^2 = \frac{1}{36}$

(E) $\mu = \frac{1}{2}$ $\sigma^2 = \frac{1}{6}$

Zadanie 7. W pewnej populacji p-stwo tego, że osobnik przeżyje 1 rok jest równe $(1-\theta)$. Jeżeli osobnik przeżył 1 rok to (warunkowe) p-stwo tego, że przeżyje następny rok jest też równe $(1-\theta)$. W próbce losowej liczącej n osobników z tej populacji zanotowano:

- n_0 przypadków, kiedy osobnik nie przeżył 1 roku
- n_1 przypadków, kiedy osobnik przeżył 1 rok, ale nie przeżył 2-go roku
- n_2 przypadków, kiedy osobnik przeżył 2 lata

Estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{n-n_0}{n}$

(B) $\dfrac{n-n_0}{n}+\dfrac{n_2}{n-n_0}$

(C) $\dfrac{n_0+n_1}{n+n_1+n_2}$

(D) $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{n-n_0}{n}+\dfrac{n_2}{n-n_0}\right)$

(E) $\dfrac{n_2}{n-n_0}$

Zadanie 8. Niech $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ będzie prostą próbą losową z rozkładu normalnego o nieznanych parametrach $\left(\mu, \sigma^2\right)$, i niech $n > 1$ oraz $\sigma^2 > 0$.

Przyjmijmy oznaczenia:

- $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
- $t(\mu_0) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2}}$ dla pewnej ustalonej liczby μ_0
- t_α to dla zadanego poziomu istotności $\alpha \in (0, 1)$ taka liczba, że $\Pr\left(\left|T_{n-1}\right| < t_\alpha\right) = \alpha$, gdzie T_{n-1} to zmienna losowa o rozkładzie *t*-Studenta z $(n$-$1)$ stopniami swobody

Rozważmy estymator $\tilde{\mu}$ parametru μ postaci:

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_0 & \textit{jeśli} \quad \left|t(\mu_0)\right| < t_\alpha \\ \overline{X} & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

obciążenie tego estymatora:

$E(\tilde{\mu}) - \mu$

jest dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(A) $\mu < \mu_0$ oraz $\left|t(\mu_0)\right| \geq t_\alpha$

(B) $\mu > \mu_0$ oraz $\left|t(\mu_0)\right| \geq t_\alpha$

(C) $\mu < \mu_0$ oraz $t(\mu_0) \geq t_\alpha$

(D) $\mu > \mu_0$

(E) $\mu < \mu_0$

Zadanie 9. Niech X będzie pojedynczą obserwacją z przesuniętego rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & dla \quad x \geq \theta \\ 0 & dla \quad x < \theta \end{cases}$$

gdzie $\theta \geq 0$ jest nieznanym parametrem.

Rozważamy jednostajnie najmocniejszy test hipotezy:
$H_0 : \theta = 0$ przeciwko alternatywie: $H_1 : \theta > 0$, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.
Zbiór wszystkich tych wartości θ, dla których moc testu wynosi co najmniej 0.90, jest postaci:

(A) $[0, \quad \ln 20 - \ln 10 + \ln 9]$

(B) $[\ln 20 - \ln 10, \quad \infty)$

(C) $[0, \quad \ln 20]$

(D) $[\ln 20 - \ln 10 + \ln 9, \quad \infty)$

(E) $[\ln 20 + \ln 10 - \ln 9, \quad \infty)$

Zadanie 10. Mamy próbę prostą $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots,(X_n,Y_n))$ z rozkładu normalnego dwuwymiarowego o nieznanych parametrach:
$EX_i = EY_i = \mu$, $VarX_i = VarY_i = \sigma^2$, $Cov(X_i,Y_i) = \sigma^2 \cdot \rho$.
Niech $Z_i = X_i + Y_i$ oraz $R_i = X_i + Y_i$,

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2, \qquad S_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \overline{R}\right)^2,$$

gdzie $\overline{Z}$ oraz $\overline{R}$ to odpowiednie średnie z próbki.
Niech ρ_0 będzie ustaloną liczbą z przedziału (-1, 1), $\rho_0 \neq 0$.
Do testowania hipotezy H_0: $\rho = \rho_0$ przeciwko alternatywie H_1: $\rho \neq \rho_0$ możemy użyć testu o obszarze krytycznym postaci:

$$\frac{S_Z^2}{S_R^2} < k_1 \quad \text{lub} \quad \frac{S_Z^2}{S_R^2} > k_2 .$$

(A) Statystyka $\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1, n-1)$

(B) Statystyka $\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1, n-1)$

(C) Statystyka $\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-1, n-1)$

(D) Statystyka $\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład $F(n-2, n-2)$

(E) Nie istnieje taki współczynnik c, że statystyka $c\cdot\frac{S_Z^2}{S_R^2}$ ma rozkład F Snedecora

Egzamin dla Aktuariuszy z 24 listopada 1997 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	E	
3	B	
4	A	
5	B	
6	A	
7	C	
8	E	
9	D	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.