Zadanie 1. Decydent z awersją do ryzyka narażony jest na szkodę X. W tabeli podane są możliwe wartości x szkody X, prawdopodobieństwa ich wystąpienia oraz wysokości odszkodowań wynikające z trzech zaoferowanych decydentowi kontraktów ubezpieczeniowych.

szkoda x	0	1	2	4
$\Pr(X = x)$	0.5	0.2	0.2	0.1
$I^{(1)}(x)$	0	0.5	1.5	3.5
$I^{(2)}(x)$	0	0	1	3
$I^{(3)}(x)$	0	0.5	1	2

Jeśli wszystkie kontrakty oferowane są po cenach równych odpowiadającym im składkom netto, to decydent wybierze kontrakt:

(A) $I^{(1)}$

(B) $I^{(2)}$

(C) $I^{(3)}$

(D) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(2)}$

(E) zależnie od postaci funkcji użyteczności $I^{(1)}$ lub $I^{(3)}$

Zadanie 2. Dla pewnego ryzyka ilość szkód na rozkład Poissona z wartością oczekiwaną 0.25, a wartość szkody *Y* ma rozkład podany w tabeli:

y	1	2	3
$\Pr(Y = y)$	0.4	0.4	0.2

Ubezpieczyciel pokrywa szkody w pełni, dopóki łączna ich wartość nie przekroczy limitu odpowiedzialności równego 4 (nadwyżkę łącznej wartości szkód ponad 4 pokrywa ktoś inny). Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość wypłaconych odszkodowań wyniesie 4 jest równe:

(A) $1 - 1.245e^{-0.25}$

(B) $1 - 1.265e^{-0.25}$

(C) $0.265e^{-0.25}$

(D) $1 - 1.285e^{-0.25}$

(E) $0.285e^{-0.25}$

Zadanie 3. W kolejnych okresach czasu ubezpieczony charakteryzujący się wartością q parametru ryzyka $Q \in (0,1)$ generuje szkody w ilości N_t:

$$\Pr(N_t = 1 / Q = q) = q = 1 - \Pr(N_t = 0 / Q = q), \quad t = 1,2;$$

przy czym:

$$\Pr(N_1 = 1 \ i \ N_2 = 1 / Q = q) = \Pr(N_1 = 1 / Q = q) \cdot \Pr(N_2 = 1 / Q = q).$$

Efekt losowania ubezpieczonego z populacji ubezpieczonych opisuje rozkład:

$$f_Q(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1 - x) & dla \quad x \in (0,1) \\ 0 & dla \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

W efekcie doświadczenia dwuetapowego (wylosowanie ubezpieczonego, następnie wygenerowanie przez niego szkód w ilości N_1 i potem N_2),

$COV(N_1, N_2)$ wynosi:

(A) 0.1

(B) $\frac{1}{12}$

(C) 0.05

(D) 0

(E) $-\frac{1}{12}$

Zadanie 4. Dla pewnego ryzyka składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad d jest dla wszystkich d należących do zbioru $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ dana wzorem:

$$E\left[(X-d)_+\right]=\frac{1}{3}-d+\frac{2}{3}d^{1.5}.$$

Zbiór wszystkich możliwych wartości $E(X)$ to przedział:

(A) $\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

(B) $\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right]$

(C) $\left[\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6},\ \frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

(D) $\left[\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12},\ \frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

(E) $\left[\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12},\ \frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right]$

Zadanie 5. Zmienna X_1 ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a niezależna od niej zmienna X_2 ma rozkład dany gęstością:

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x & dla \quad x \in (0,1) \\ 0 & dla \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

$\Pr(X_1 + X_2 \le 2)$ wynosi:

(A) $1 - 2e^{-1}$

(B) $1 - e^{-1}$

(C) $1 - 2e^{-2}$

(D) $1 - e^{-2}$

(E) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawidłowa

Zadanie 6. Rozkład wartości pojedynczej szkody X dany jest gęstością:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{160}{(2+x)^6} & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0 \end{cases}$$

Niech $Y = (1+i) \cdot X, \quad i \ge 0$ (możemy i interpretować jako stopę inflacji). Niech Z ma rozkład taki, jaki ma nadwyżka szkody X ponad kwotę $d \ge 0$ pod warunkiem, iż szkoda X przekroczy kwotę d. Warunek konieczny i wystarczający, aby rozkłady zmiennych Z oraz Y były identyczne brzmi:

(A) $d = i$

(B) $d = 2 \cdot i$

(C) $d = (1+i)^2 - 1$

(D) $d = \dfrac{2 \cdot i}{1+i}$

(E) $d = 0$ i równocześnie $i = 0$

Zadanie 7. W modelu łącznego ryzyka *(collective risk model)* rozkład ilości szkód N jest rozkładem geometrycznym, a rozkład wartości pojedynczej szkody Y określony jest na zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Znamy częściowo rozkład łącznej wartości szkód S:

k	0	1	2	3	4	5
$\Pr(S = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{3}{4000}$	$\frac{4503}{40000}$	$\frac{9003}{400000}$

$\Pr(Y = 5)$ wynosi:

(A) 0.00

(B) 0.10

(C) 0.20

(D) podane informacje są sprzeczne

(E) podane informacje są niewystarczające do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 8. Obserwujemy realizacje x_{it} łącznej wartości szkód X_{it} i-tego ubezpieczonego w t-tym roku dla $i = 1, 2, \ldots, N,\quad t = 1, 2, \ldots, T;\quad N > 2,\ T > 2;$
nie znamy natomiast wartości następujących parametrów:

$$\mu(\Theta_i) = E(X_{it} / \Theta_i),$$
$$\sigma^2(\Theta_i) = VAR(X_{it} / \Theta_i),$$
$$\mu = E(\mu(\Theta_i)),$$
$$s^2 = E(\sigma^2(\Theta_i)),$$
$$a = VAR(\mu(\Theta_i));$$

wiemy natomiast, że jeśli $i \neq j$ lub $t \neq s$ to $COV(X_{it}, X_{js} / \Theta_i, \Theta_j) = 0$.

Niech $\overline{X}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{it}$, $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i$.

Mamy dwa estymatory parametru a:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{NT-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}\right)^2 - \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \overline{X}_i\right)^2,$$

oraz:

$$\hat{a}_2 = \max\{\hat{a}_1, 0\}.$$

Niech $MSE(\hat{a}_i) = E\left[(\hat{a}_i - a)^2\right]$.

Wybierz zdanie prawdziwe:

(A) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(B) oba estymatory są nieobciążone, $VAR(\hat{a}_1) > VAR(\hat{a}_2)$

(C) $E(\hat{a}_1) < E(\hat{a}_2)$, $VAR(\hat{a}_1) < VAR(\hat{a}_2)$

(D) $VAR(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1) < MSE(\hat{a}_2)$,

(E) $VAR(\hat{a}_2) < MSE(\hat{a}_2) < VAR(\hat{a}_1)$

Zadanie 9. Niech X oznacza ryzyko (zmienną losową o własności $\Pr(X \geq 0) = 1$), a $\Pi(\cdot)$ niech oznacza formułę kalkulacji składki (przyporządkowującą każdemu ryzyku liczbę nieujemną lub $+\infty$).

Oto trzy własności formuł kalkulacji składki, często uznawane za pożądane:

1. addytywność: $\Pi(X+Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$ dla każdej pary X, Y ryzyk niezależnych,
2. translatywność: $\Pi(X+c) = \Pi(X) + c$ dla każdego ryzyka X i stałej $c > 0$,
3. iteratywność: $\Pi(X) = \Pi(\Pi(X/\Theta))$ dla ryzyka X zależnego od czynnika losowego Θ.

Która z poniższych pięciu formuł kalkulacji składki spełnia wszystkie trzy wyżej wymienione własności?

(A) $\Pi(X) = (1+\alpha)E(X)$ $\alpha > 0$

(B) $\Pi(X) = E(X) + \alpha \cdot VAR(X)$ $\alpha > 0$

(C) $\Pi(X) = E(X) + \alpha \cdot \sqrt{VAR(X)}$ $\alpha > 0$

(D) $\Pi(X) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(E\left(e^{\alpha \cdot X}\right)\right)$ $\alpha > 0$

(E) $\Pi(X) = \delta \cdot E(X) + (1-\delta) r_{0.1}$, $\delta \in (0,1)$, $r_{0.1} = \inf\{r: \Pr(X > r) \leq 0.1\}$

Zadanie 10. W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 2, składka należna za rok wynosi 1, a rozkład łącznej wartości szkód za n-ty rok W_n dany jest dla każdego n wzorem:

$$\Pr(W_n = k) = p \cdot q^k, \quad k = 0,1,2, \ldots, \quad \text{gdzie} \quad p = 1 - q > q > 0;$$

W_1, W_2, ... są ponadto niezależne.

Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) 1

(B) $\left(\frac{q}{p}\right)^2$

(C) $\left(\frac{q}{p}\right)^3$

(D) $\left(\frac{q}{p}\right)^4$

(E) $\left(\frac{q}{p}\right)^5$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 kwietnia 1997 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	A	
2	B	
3	C	
4	D	
5	C	
6	B	
7	A	
8	E	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.