Zadanie 1. Rozważmy zdarzenia losowe A_1, A_2 oraz C takie, że:

$\Pr(C|A_1) = \frac{1}{3}$, $\Pr(C|A_2) = \frac{1}{2}$,

$\Pr(A_1) = \Pr(A_2) = \frac{1}{2}$,

zdarzenia A_1 i A_2 są niezależne oraz $A_1 \cap A_2 \cap C = \emptyset$.
Z powyższych danych wynika, że:

(A) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{2}{3}$

(B) zdarzenia A_1, A_2 i C są niezależne

(C) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{5}{9}$

(D) dane zawierają sprzeczność, taka sytuacja jest niemożliwa

(E) $\Pr(C|A_1 \cup A_2) = \frac{5}{12}$

Zadanie 2. Jeśli dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy
$\Pr(N \leq 1) = \frac{8}{9} \cdot \Pr(N = 2)$, to:

(A) $E(N) = \frac{17}{9}$

(B) $E(N) = 3$

(C) $VAR(N) = 2$

(D) $E(N^2) = 3$

(E) $E(N) = \frac{8}{9}$

Zadanie 3. Załóżmy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{735}$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{880}$ są niezależne, o rozkładach:

$$\Pr(X_i = 0) = \frac{3}{7}, \quad \Pr(X_i = 1) = \frac{4}{7},$$

$$\Pr(Y_i = 0) = \Pr(Y_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Prawdopodobieństwo tego, że:

$$\sum_{i=1}^{735} X_i < \sum_{i=1}^{880} Y_i ,$$

policzone w przybliżeniu przy pomocy aproksymacji rozkładem normalnym, wynosi:

A) 0.01

(B) 0.99

(C) 0.16

(D) 0.50

(E) 0.84

Zadanie 4. Zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 mają łączny rozkład normalny, gdzie $E(X_i) = 0$, $VAR(X_i) = 1$ dla $i = 1, 2, 3$.
Jeśli $COV(X_1, X_2) = COV(X_2, X_3) = COV(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = 0$, to:

(A) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = -X_3) = 0$

(B) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = X_3) = 1$

(C) wynika stąd, że $\Pr(X_1 > -X_3) = \frac{1}{2}$

(D) wynika stąd, że $\Pr(X_1 = -X_3) = 1$

(E) nie musi stąd wynikać żadne ze stwierdzeń (A)-(D)

Zadanie 5. Zmienne losowe X i Y są niezależne.
X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Y ma rozkład o gęstości:

$$g(y) = \begin{cases} e^{-y} & dla \quad 0 \le y \\ 0 & w \ przeciwnym \ przypadku \end{cases}$$

Jeśli $S = X + Y$ to $E\left(S \middle| X \le \frac{1}{2} \right)$ wynosi:

(A) 2

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{13}{12}$

Zadanie 6. $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ jest próbą losową z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie μ i σ^2 są nieznanymi parametrami. Niech $[L, U]$ będzie przedziałem ufności dla parametru μ takim, że
$\Pr_{\mu,\sigma}(L > \mu) = \Pr_{\mu,\sigma}(U < \mu) = 0.025$ dla każdych μ i σ^2.
Niech $(-\infty, W]$ będzie jednostronnym przedziałem ufności dla parametru μ takim, że $\Pr_{\mu,\sigma}(W < \mu) = 0.01$ dla każdych μ i σ^2.
Oba przedziały zbudowane są w standardowy sposób w oparciu o średnią i wariancję z próbki $\overline{x}$ i s^2. Jeżeli $L = -0.262$ i $U = 4.262$ to wartość W wynosi:

(A) 4.262

(B) 4.821

(C) 5.169

(D) 3.833

(E) nie można podać wartości W na podstawie tych danych

Zadanie 7. Niech $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$, gdzie $n > 1$, będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} & dla \quad 0 \le x \\ 0 & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Rozważamy dwa estymatory nieznanego parametru $\mu > 0$:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\mu}_2 = n \cdot \min\{X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\}.$$

(A) Estymator $\hat{\mu}_1$ jest nieobciążony, zaś $\hat{\mu}_2$ jest obciążony.

(B) Estymator $\hat{\mu}_1$ jest obciążony, zaś $\hat{\mu}_2$ jest nieobciążony.

(C) Oba estymatory są nieobciążone i mają równe wariancje.

(D) Oba estymatory są nieobciążone; dla pewnych wartości μ estymator $\hat{\mu}_1$ ma większą wariancję niż $\hat{\mu}_2$.

(E) Oba estymatory są nieobciążone; $\hat{\mu}_1$ ma zawsze mniejszą wariancję niż $\hat{\mu}_2$.

Zadanie 8. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest próbą losową z rozkładu o dystrybuancie:

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^\alpha}, \qquad \left(-\infty < x < \infty, \quad \alpha > 0\right).$$

Estymator największej wiarygodności nieznanego parametru α ma postać:

(A) $\hat{\alpha} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\exp(-x_i)\right)}^{\,-1}$

(B) $\hat{\alpha} = \exp(-\bar{x})$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$

(C) $\hat{\alpha} = \ln\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1+\exp(-x_i)\right)^{-1}\right]$

(D) $\hat{\alpha} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\exp(-x_i)\right)$

(E) $\hat{\alpha} = n\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\exp(-x_i)\right)\right]^{-1}$

Zadanie 9. Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$. Na podstawie pojedynczej obserwacji X przeprowadzamy test hipotezy:

$$H_0 : f(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ \ przeciwnym \ \ przypadku \end{cases}$$

przeciwko alternatywie:

$$H_1 : f(x) = \begin{cases} 5 \cdot x^4 & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & w \ \ przeciwnym \ \ przypadku \end{cases}$$

Najmocniejszy test na poziomie istotności α ma moc:

(A) $1-(1-\alpha)^5$

(B) $(1-\alpha)^5$

(C) α^5

(D) $5\alpha^4$

(E) $1-5\alpha^4$

Zadanie 10. Wykonano 120 razy rzut dwiema kośćmi do gry: czarną i białą.

45 razy na białej kości wypadło więcej oczek, niż na czarnej;
50 razy na białej kości wypadło mniej oczek, niż na czarnej;
25 razy na obu kościach wypadła ta sama liczba oczek.

Rozważmy hipotezę H_0: „obie kości są rzetelne i wynik rzutu kością białą jest niezależny od wyniku rzutu kością czarną".
Czy otrzymane wyniki dają podstawę, żeby odrzucić hipotezę H_0? Przeprowadzono test χ^2 w oparciu o przytoczone dane.

(A) Na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ test prowadzi do odrzucenia H_0.

(B) Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ test prowadzi do odrzucenia H_0, natomiast dla $\alpha = 0.05$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(C) Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ test prowadzi do odrzucenia H_0, natomiast dla $\alpha = 0.01$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(D) Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ test nie prowadzi do odrzucenia H_0.

(E) Na poziomie istotności $\alpha = 0.005$ test prowadzi do odrzucenia H_0.

Egzamin dla Aktuariuszy z 18 stycznia 1997 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	E	
4	D	
5	C	
6	B	
7	E	
8	E	
9	A	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.