Zadanie 1. Likwidacja szkody zaistniałej w miesiącu t następuje w tym samym miesiącu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{22}$, a w miesiącu $t+k$ z prawdopodobieństwem $\frac{5}{22}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$. Wartość każdej szkody wynosi 1. W miesiącach t, t+1 i t+2 zaistniały odpowiednio 88, 110 i 132 szkody. Wyznacz stan rezerwy szkodowej na koniec miesiąca t+2, jeśli na początku miesiąca t stan tej rezerwy wynosił 320.

(A) 315

(B) 363

(C) 375

(D) 399

(E) brakuje danych o strukturze rezerwy na początku t-tego miesiąca

Zadanie 2. Rozkład ilości szkód dla jednorodnej grupy ryzyk jest rozkładem Poissona, a wartość szkody ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}. Niech λ_F oznacza najmniejszą oczekiwaną ilość szkód (zaokrągloną do liczby całkowitej) taką, przy której danym statystycznym o grupie ryzyk przypisujemy pełną wiarygodność (*full credibility*), tzn. dla której $\Pr(0.9 \cdot c < C < 1.1 \cdot c) \geq 0.95$, gdzie c jest całkowitą składką netto, a C jej oszacowaniem (łączną wartością szkód zarejestrowanych w naszym zbiorze danych). Przyjmując aproksymację rozkładem normalnym rozkładu zmiennej C i wiedząc, iż standaryzowana zmienna normalna przyjmuje wartość większą co do modułu od 1.96 z prawdopodobieństwem 0.05 otrzymujemy iż λ_F wynosi:

(A) 768

(B) 543

(C) 384

(D) do udzielenia odpowiedzi brakuje informacji o wartości β

(E) do udzielenia odpowiedzi brakuje informacji o ilości jednostek ryzyka w grupie

Zadanie 3. Dla pewnego ryzyka wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze liczb naturalnych (bez zera), a łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona. Składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad k dla wybranych wartości k wynosi:

k	3	4	6	7
$\mathrm{E}\left[(X-k)_+\right]$	0.366	0.199	0.057	0.029

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód X wyniesie 4, 5 lub 6 wynosi:

(A) 0.337

(B) 0.309

(C) 0.170

(D) 0.139

(E) brakuje danych do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 4. O rozkładzie wartości szkody Y wiemy, iż jest to rozkład ciągły z dystrybuantą ściśle rosnącą na przedziale $(0, M)$, oraz iż $\Pr(Y \in (0, \quad M)) = 1$.
Ponadto wiemy, iż składka netto za nadwyżkę szkody ponad d jest dla $d \in (4, \quad 7)$ dana wzorem:

$$E[(Y-d)_+] = \frac{(10-d)^3}{300}.$$

Niech Z_E oznacza zbiór możliwych wartości $E(Y)$, zaś Z_M zbiór możliwych wartości M. Zbiory te mają postać:

(A) $Z_E = (2.16, \quad 4.72)$, $Z_M = (7.09, \quad \infty)$

(B) $Z_E = (2.16, \quad 4.72)$, $Z_M = (8.00, \quad \infty)$

(C) $Z_E = (1.56, \quad 4.72)$, $Z_M = (7\tfrac{3}{7}, \quad \infty)$

(D) $Z_E = (1.56, \quad 3\tfrac{1}{3})$, $Z_M = (7\tfrac{3}{7}, \quad 10)$

(E) $Z_E = (2.16, \quad 3\tfrac{1}{3})$, $Z_M = (8, \quad 10)$

Zadanie 5. Dla pewnego ryzyka ilość szkód ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną λ, a całkowita wartość szkody X (jeśli do szkody dojdzie) składa się z dwóch części: wartości szkody materialnej Y oraz wartości szkody na życiu lub zdrowiu Z. O szkodzie mówimy wtedy, gdy jej wartość jest dodatnia, tzn. zakładamy iż:

$\Pr(X > 0) = 1$.

Jednak tylko pierwsza część jest zawsze dodatnia: $\Pr(Y > 0) = 1$, natomiast szkoda na życiu lub zdrowiu jest dodatnia raz na sześć szkód: $\Pr(Z > 0) = \frac{1}{6}$.

Szkody materialne, gdy nie ma szkód na życiu lub zdrowiu mają momenty:

$$E(Y / Z = 0) = 1, \quad Var(Y / Z = 0) = 2,$$

natomiast kiedy wystąpią szkody na życiu lub zdrowiu, wtedy:

$$E(Y / Z > 0) = 2, \quad Var(Y / Z > 0) = 3$$

$$E(Z / Z > 0) = 4, \quad Var(Z / Z > 0) = 12$$

Wiemy ponadto, iż $COV(Y, Z / Z > 0)$ jest dodatnia, aczkolwiek związek tych zmiennych przy $Z > 0$ nie jest funkcyjny. Zbiór możliwych wartości wariancji łącznej wartości szkód z tego ryzyka mieści się w przedziale:

(A) $(9 \cdot \lambda, \quad 13 \cdot \lambda)$

(B) $(12 \cdot \lambda, \quad 15 \cdot \lambda)$

(C) $(12 \cdot \lambda, \quad 14 \cdot \lambda)$

(D) $(11 \cdot \lambda, \quad 13 \cdot \lambda)$

(E) $(10 \cdot \lambda, \quad 13 \cdot \lambda)$

Zadanie 6. Liczba szkód dla jednego ryzyka ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(N = k / \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

z tą samą wartością λ dla danego ryzyka w kolejnych latach. W populacji (o nieskończonej liczebności) ryzyk rozkład parametru Λ jest rozkładem Gamma(α, β). W roku 0 mieliśmy w portfelu *n* ryzyk przypadkowo wylosowanych z tej populacji, i wygenerowały one N_0 szkód. W roku 1 nasz portfel liczy także n ryzyk, przy czym pewna ich część to losowo wybrana podgrupa (licząca od zera do n ryzyk) z portfela z roku 0, a pozostałość to ryzyka dolosowane z populacji. Niech N_1 oznacza ilość szkód w roku 1. Niech *m* oznacza najmniejszą, a *M* największą możliwą wartość

$E\left[(N_1 - N_0)^2\right]$.

$\{m, \quad M\}$ równa się:

(A) $\left\{n \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2n \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right\}$

(B) $\left\{2n \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2n \cdot \frac{\alpha}{\beta} + n \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}\right\}$

(C) $\left\{n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right), \quad 2n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\right\}$

(D) $\left\{2n \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\right\}$

(E) $\left\{2n \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad 2n \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right)\right\}$

Zadanie 7. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela charakteryzują parametry:
λ - częstotliwość (roczna) Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód,
u - nadwyżka początkowa
- rozkład zmiennej Y - wartości pojedynczej szkody
θ - stosunkowy narzut na składkę netto.
Załóżmy, iż $\Pr(Y = M) = 1$, gdzie M jest dodatnie. Załóżmy także, iż $u = 10 \cdot M$.
Przyjmijmy wreszcie, iż nasz cel to skalkulowanie składki tak, aby zachodził warunek bezpieczeństwa: $e^{-Ru} = 0.10$, gdzie R to tzw. *adjustment coefficient*. Wtedy wartość θ:

(A) jest różna dla różnych M

(B) jest różna dla różnych λ

(C) wynosi $10 \cdot \left(10^{0.1} - 1\right) - \ln 10$

(D) wynosi $10 \cdot \left(e^{0.1} - 1\right) - 1$

(E) wynosi $\dfrac{10 \cdot \left(10^{0.1} - 1\right)}{\ln 10} - 1$

Zadanie 8. W klasycznym modelu nadwyżki ubezpieczyciela rozkład wartości szkody Y jest taki, że dodatni współczynnik R istnieje. Niekiedy (zależy to od własności rozkładu zmiennej Y) można łatwo wskazać taką liczbę $g > 1$, że dla każdego dodatniego u prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u) \le \frac{e^{-Ru}}{g}$. Wybierz tę z odpowiedzi prawidłowych, dla której g jest liczbą możliwie największą:

(A) $g = \inf_{d>0}\left\{E\left(e^{R(Y-d)} / Y > d\right)\right\}$

(B) $g = \inf_{d>0}\left\{E\left(e^{R(Y-d)} / Y > d\right) \cdot \Pr(Y > d)\right\}$

(C) $g = \inf_{d>0}\left\{e^{R \cdot E(Y-d/Y>d)}\right\}$

(D) $g = \inf_{d>0}\left\{e^{R \cdot E\left[(Y-d)_+\right]}\right\}$

(E) $g = E\left(e^{R(Y-EY)}\right)$

Zadanie 9. Wartość szkody Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}. Ubezpieczyciel pokrywa jedynie $W = \min\{Y, \quad M\}$, gdzie M jest limitem odpowiedzialności. Wartość funkcji generującej momenty zmiennej W w punkcie t ma postać:

(A) $\frac{\beta}{\beta - t} e^{-(\beta - t)\cdot M} - \frac{t}{\beta - t}$

(B) $\frac{\beta}{\beta - t} - \frac{t}{\beta - t} e^{-(\beta - t)\cdot M}$

(C) $\frac{\beta}{\beta - t} \cdot e^{t\cdot M} \cdot \left(1 - e^{-\beta\cdot M}\right)$

(D) $\frac{\beta}{\beta - t} \cdot e^{-\beta\cdot M} \cdot \left(1 - e^{t\cdot M}\right)$

(E) $\frac{\beta}{\beta - t} \cdot e^{-(\beta - t)M}$

Zadanie 10. Decydent kieruje się maksymalizacją wartości oczekiwanej funkcji użyteczności postaci: $u(x) = \sqrt{x}$,
posiada majątek wart 400
i narażony jest na stratę X o rozkładzie trzypunktowym:

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X = 50) = \Pr(X = 100) = \frac{1}{3}.$$

Gotów jest on zapłacić nie więcej niż 30 za pokrycie ryzyka X (lub jego części).
Ubezpieczyciele oferują wszystkie dopuszczalne kontrakty po cenie równej składce netto. W tych warunkach maksimum oczekiwanej użyteczności decydenta wynosi:

(A) 18.4

(B) 18.7

(C) 19.0

(D) 19.3

(E) 19.6

Egzamin dla Aktuariuszy z 7 grudnia 1996 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	C	
3	D	
4	B	
5	D	
6	E	
7	E	
8	A	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.