Zadanie 1. Wiadomo, że A, B i C są trzema zdarzeniami losowymi takimi, że:

$\Pr(A)=\frac{2}{5}$, $\Pr(B|A)=\frac{1}{4}$, $\Pr(C|A\cap B)=\frac{1}{2}$,

$\Pr(A\cup B)=\frac{6}{10}$, $\Pr(C|B)=\frac{1}{3}$.

Ile wynosi $\Pr(A|B\cap C)$?

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{10}$

(E) Podane informacje nie wystarczają do udzielenia odpowiedzi

Zadanie 2. Niech $U_1, U_2, \dots, U_n$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale (a, b). Rozważmy zmienne losowe $X = \min\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ oraz $Y = \max\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Współczynnik korelacji liniowej $Corr(X, Y)$ wynosi:

(A) $-\frac{1}{n}$

(B) $\frac{1}{n}$

(C) $\frac{1}{n-1}$

(D) $\frac{(b-a)^2}{n-1}$

(E) 0

Zadanie 3. Niech $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ będzie próbą niezależnych realizacji z dwuwymiarowego rozkładu normalnego o wektorze wartości oczekiwanych (μ_X, μ_Y) i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$.

Statystyka $\min\left\{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i\right\}$

jest nieobciążonym estymatorem parametru $\min\{\mu_X, \mu_Y\}$:

(A) dla każdego ρ

(B) tylko, jeśli $\rho = 0$

(C) tylko, jeśli $|\rho| = 1$

(D) tylko, jeśli $\rho = 1$

(E) nigdy

Zadanie 4. Zmienna losowa X ma rozkład logarytmiczno-normalny o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\ln x - \mu)^2\right] & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wiadomo, że $\Pr(X \le q) = 0.6$ oraz $\Pr(X \le r) = 0.4$. Wynika stąd, że

(A) $E(X) = \sqrt{q \cdot r \cdot e}$

(B) $E(\ln X) = \sqrt{q \cdot r}$

(C) Podane informacje są sprzeczne

(D) $E(X) = \frac{q+r}{2}$

(E) $E(X) = \sqrt{q \cdot r}$

Zadanie 5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają jednakowy rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Zmienna losowa N jest niezależna od nich i ma rozkład geometryczny:

$$\Pr(N = k) = (1 - q) \cdot q^k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Niech $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ będzie sumą losowej liczby zmiennych losowych (przyjmujemy że $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$).

Dla każdego $s > 0$ prawdą jest, że:

(A) $Var(N|S = s) = E(N|S = s) - 1$

(B) $Var(N|S = s) = E(N|S = s)$

(C) $Var(N|S = s) = Var(N) - [E(N|S = s)]^2$

(D) $Var(N|S = s) = s \cdot q^2$

(E) $Var(N|S = s) = s \cdot q$

Zadanie 6. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$. Prawdopodobieństwo $\Pr\left(X_1^2 - 5 \cdot X_2^2 < 5 \cdot X_3^2 - X_4^2\right)$ wynosi:

(A) $\frac{4}{5}$

(B) $\frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)$

(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{5+\sigma^2}{6+\sigma^2}$

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ będzie próbą losową z rozkładu wykładniczego o nieznanej wartości oczekiwanej μ. Estymujemy μ na podstawie częściowej informacji o próbce, a mianowicie na podstawie tego, iż:

- 80 zmiennych (spośród wszystkich 100 z próbki) przybrało wartości poniżej 3,
- średnia arytmetyczna z tych 80-ciu wartości wynosi 2.

Oparty na tej informacji estymator Największej Wiarygodności parametru μ przybiera wartość:

(A) $\frac{11}{4}$

(B) 2

(C) $\frac{5}{2}$

(D) 3

(E) nie można stosować metody NW, gdyż częściowo obserwowalne zmienne nie mają gęstości prawdopodobieństwa

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu Gamma o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \qquad p, \lambda > 0$$

Zakładamy, że parametr λ jest znany, zaś p jest nieznane. Jednostajnie najmocniejszy test hipotezy

$H_0: \quad p = 2$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: \quad p > 2$

na poziomie istotności α

(A) ma obszar krytyczny postaci $X_1 + X_2 + \cdots + X_n > k$

(B) ma obszar krytyczny postaci $\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n > k$, gdzie k zależy od parametru λ i liczby α

(C) ma obszar krytyczny postaci $\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n > k$, gdzie k zależy od liczby α ale nie zależy od parametru λ

(D) ma obszar krytyczny postaci $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 > k$

(E) nie istnieje

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego na odcinku (a, b), gdzie $0 \le a < b$. Rozważamy zagadnienie weryfikacji hipotezy

$H_0: \quad a = 0$ przeciw hipotezie alternatywnej:

$H_1: \quad a > 0$.

Test ilorazu wiarygodności ma obszar krytyczny o postaci:

(A) $\dfrac{\overline{X}^2}{s^2} > k$, gdzie: $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$, $s^2 = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$

(B) $\dfrac{M}{s} > k$, gdzie: $M = \max\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$, $s = \sqrt{s^2}$

(C) $\dfrac{m}{\overline{X}} > k$, gdzie: $m = \min\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$

(D) $\dfrac{m}{M} > k$, gdzie m oraz M jak wyżej

(E) $\dfrac{M - m}{m} > k$, gdzie m oraz M jak wyżej

Zadanie 10. Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \}$ i macierz prawdopodobieństw przejścia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład początkowy (w chwili 0) jest wektorem $[0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]$. Z jakim prawdopodobieństwem łańcuch znajduje się w chwili 100 (po stu przejściach) w stanie e_4?

(A) 0.7

(B) 0.8

(C) 0.9

(D) 0.65

(E) 0

Egzamin dla Aktuariuszy z 16 listopada 1996 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	B	
3	D	
4	A	
5	A	
6	C	
7	A	
8	B	
9	D	
10	D	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.