Zadanie 1. Mamy dwóch strzelców. Prawdopodobieństwo trafienia w cel pojedynczym strzałem wynosi dla lepszego z nich 0.8, a dla gorszego 0.4. Nie wiemy, który z nich jest gorszy, a który lepszy. Testujemy strzelców poddając ich ciągowi prób, z których każda polego na oddaniu jednego strzału przez każdego z nich. Test przerywamy po pierwszej takiej próbie, w wyniku której jeden ze strzelców trafił, a drugi spudłował. Następnie ten strzelec, który w ostatniej próbie trafił, oddaje jeszcze jeden strzał. Jakie jest prawdopodobieństwo, iż tym razem także trafi w cel?

(A) 0.60

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 0.70

(D) $\frac{26}{35}$

(E) 0.78

Zadanie 2. Tarczę strzelniczą umieszczamy na płaszczyźnie ze środkiem tarczy w punkcie o współrzędnych $(0, 0)$. Punkt trafienia przez strzelca w tarczę ma dwuwymiarowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej $(0, 0)$, o takiej samej wariancji obu współrzędnych i o zerowej ich kowariancji. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia przez strzelca w punkt odległy od środka tarczy o mniej niż jedno odchylenie standardowe?

(A) $1-\exp(-0.5)$

(B) $(e-1)^{-1}$

(C) $1-\exp(-1)$

(D) $\exp(-1)$

(E) $\exp(-0.5)$

Zadanie 3. Oblicz $\Pr\left(\min\{k_1, k_2, k_3\} = 3\right)$ jeśli k_1, k_2, k_3 to liczby oczek uzyskane w wyniku rzutu trzema (uczciwymi) kostkami do gry.

(A) $\frac{36}{216}$

(B) $\frac{37}{216}$

(C) $\frac{38}{216}$

(D) $\frac{39}{216}$

(E) $\frac{40}{216}$

Zadanie 4. Funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dla } (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

$E\left(X \middle| Y = \frac{1}{2} \right)$ wynosi:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{5}{12}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{7}{12}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 5. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości λ, który chcemy oszacować. Niestety możemy obserwować jedynie zmienną losową M, która przyjmuje wartość zero jeśli N równa jest zero, a wartość jeden jeśli N jest większa od zera. Średnią arytmetyczną z próbki niezależnych obserwacji na zmiennej M oznaczmy przez $\overline{m}$. Uzyskany metodą największej wiarygodności estymator parametru λ ma postać:

(A) $\dfrac{\overline{m}}{1-\overline{m}}$

(B) $\exp(-\overline{m})$

(C) $-\ln \overline{m}$

(D) $\ln\left(\dfrac{1}{1-\overline{m}}\right)$

(E) $\exp(\overline{m}-1)$

Zadanie 6. Testujemy niezależność dwóch cech z tablicy kontyngencyjnej. Jedna z cech przyjmuje n, a druga m możliwych wartości. Ilość obserwacji w każdej z $(n \cdot m)$ celek (klatek, komórek) jest wystarczająca, aby zastosować test niezależności chi-kwadrat. Odpowiednia statystyka będzie miała rozkład (asymptotyczny) chi-kwadrat o ilości stopni swobody równej:

(A) $(n-2) \cdot (m-2)$

(B) $(n-2) \cdot (m-2)+1$

(C) $(n-2) \cdot (m-2)+2$

(D) $(n-1) \cdot (m-1)-1$

(E) $(n-1) \cdot (m-1)$

Zadanie 7. Sygnały pojawiają się w czasie zgodnie z procesem Poissona, a oczekiwana ilość sygnałów na jednostkę czasu wynosi λ. Obserwujemy proces od momentu T_0 do momentu T_n pojawienia się n-tego sygnału, przy czym n jest z góry ustaloną liczbą całkowitą równą co najmniej 2. Nieobciążonym estymatorem parametru λ jest:

(A) $\dfrac{T_n - T_0}{n}$

(B) $\dfrac{n}{T_n - T_0}$

(C) $\dfrac{n-1}{T_n - T_0}$

(D) $\dfrac{T_n - T_0}{n-1}$

(E) $\dfrac{n-0.5}{T_n - T_0}$

Zadanie 8. Zmienna losowa (X_1, X_2, X_3) ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $(0, 0, 0)$ i macierzą kowariancji $\begin{bmatrix} 4 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$.

Jeśli występująca w równaniu:

$X_1 = a \cdot X_2 + b \cdot X_3 + E$

zmienna losowa E ma być nieskorelowana ze zmiennymi losowymi (X_2, X_3), to współczynnik a musi wynieść:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) 2

(E) $\frac{7}{3}$

Zadanie 9. Pobraliśmy 100 niezależnych obserwacji z rozkładu normalnego o nieznanej wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2. Nasz pracownik obliczył 10 sum po 10 kolejnych obserwacji a następnie zgubił dane źródłowe.
Zamiast więc pierwotnych obserwacji $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ mamy obserwacje $(y_1, y_2, \ldots, y_{10})$, gdzie: $y_i = \sum_{j=0}^{9} x_{10 \cdot i - j}$.

Szacujemy wariancję σ^2 używając estymatora postaci: $const \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2$. Estymator ten jest nieobciążony wtedy i tylko wtedy, kiedy stała *const* równa jest:

(A) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{9 \cdot \sqrt{10}}$

(C) $\frac{1}{81}$

(D) $\frac{1}{90}$

(E) $\frac{1}{99}$

Zadanie 10. Niech X ma funkcję gęstości:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x + 0.5 & \text{dla } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

gęstość $f_Y(y)$ zmiennej losowej $Y = X^2$ dana jest dla $y \in (0, 1)$ wzorem:

(A) $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

(B) $2 \cdot y$

(C) $\dfrac{3}{2} - y$

(D) $\dfrac{4}{3} - y^2$

(E) $\dfrac{1}{(y+1) \cdot \ln 2}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 26 października 1996 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	B	
4	D	
5	D	
6	E	
7	C	
8	B	
9	D	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.