Zadanie 1. O zdarzeniach *A, B, C* z pewnej przestrzeni uzyskaliśmy informacje, iż następujące prawdopodobieństwa: $\Pr(A|B \cap C)$, $\Pr(B|A \cap C)$ oraz $\Pr(C|A \cap B)$ są określone i wynoszą odpowiednio: 0.6, 0.3 oraz 0.9. $\Pr[(A \cap B \cap C)|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)]$ wynosi:

(A) 0.3000

(B) $\frac{9}{37}$

(C) $\frac{9}{55}$

(D) uzyskane informacje nie wystarczają do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

(E) odpowiedzi udzielić się nie da, bo uzyskane informacje są nawzajem sprzeczne

Zadanie 2. Mamy 4 urny, a w każdej z nich po 4 kule, przy czym w urnie *k-tej* jest k kul czarnych i $(4-k)$ kul białych. Wybieramy przypadkowo (z równym prawdopodobieństwem wyboru) jedną z 4 urn. Z wybranej urny wyciągnęliśmy kulę czarną. Odkładamy ją na bok i z tej samej urny ciągniemy drugą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągniemy znów kulę czarną?

(A) $\frac{5}{12}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Zadanie 3. Pobieramy 8 niezależnych realizacji jednowymiarowej zmiennej losowej o nieznanym (ale ciągłym) rozkładzie. Po uporządkowaniu zaobserwowanych wartości w ciąg rosnący $\{z_1, \ldots, z_8\}$ tworzymy przedział (z_2, z_7). Z jakim prawdopodobieństwem tak określony przedział pokrywa wartość mediany rozkładu badanej zmiennej losowej?

(A) $\frac{110}{128}$

(B) $\frac{112}{128}$

(C) $\frac{119}{128}$

(D) $\frac{120}{128}$

(E) $\frac{127}{128}$

Zadanie 4. Funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x + 2xy + \frac{1}{4}y & \text{dla } (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

$\Pr\left(X > \frac{1}{2} \middle| Y > \frac{1}{2} \right)$ wynosi:

(A) $\frac{5}{7}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{7}{9}$

(D) $\frac{4}{5}$

(E) $\frac{9}{11}$

Zadanie 5. Rozkład warunkowy zmiennej S (równej $X_1 + \cdots + X_N$) przy danym $\Lambda = \lambda$ jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem częstotliwości λ oraz z rozkładem wykładniczym składnika sumy (X_i) o wartości oczekiwanej równej 2.

Rozkład brzegowy zmiennej Λ dany jest funkcją prawdopodobieństwa : $\Pr(\Lambda = 1) = \frac{3}{4}$

$\Pr(\Lambda = 2) = \frac{1}{4}$. Wariancja (z rozkładu bezwarunkowego) zmiennej S wynosi:

(A) 5

(B) 10

(C) $10\frac{3}{4}$

(D) $15\frac{7}{8}$

(E) 17

Zadanie 6. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą niezależnymi realizacjami zmiennej losowej normalnej o nieznanej średniej i wariancji. Rozpatrzmy klasę estymatorów wariancji określonych wzorem $S(c) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2$, gdzie $\overline{x}$ jest średnią z próbki, a c jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wartość c, przy której błąd średniokwadratowy *(Mean Square Error)* estymatora $S(c)$ osiąga minimum, wynosi:

(A) $\dfrac{1}{n-1}$

(B) $\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}$

(C) $\dfrac{1}{n}$

(D) $\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$

(E) $\dfrac{1}{n+1}$

Zadanie 7. Niech $x_1,\ldots,x_n$ będzie próbką niezależnych obserwacji z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,\varphi)$ z nieznanym prawym końcem przedziału φ.

Estymator $\frac{n+1}{n}\cdot\max\{x_1,\ldots,x_n\}$ jest nieobciążony. Jego wariancja wynosi:

(A) $\frac{\varphi^2}{n(n+2)}$

(B) $\frac{\varphi^2}{(n+1)(n+2)}$

(C) $\frac{\varphi^2}{6n}$

(D) $\frac{\varphi^2}{2n^2}$

(E) $\frac{\varphi^2}{12n}$

Zadanie 8. Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o trzech stanach (E_1, E_2, E_3) jest postaci:

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad q \in (0,1) \quad , \quad p = 1 - q \ .$$

Załóżmy, iż po nieograniczenie rosnącej liczbie kroków rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zbiega do: $\Pr(E_1) = \frac{1}{7}$, $\Pr(E_2) = \frac{2}{7}$, $\Pr(E_3) = \frac{4}{7}$. Wobec tego q wynosi:

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{7}$

(D) to zależy od rozkładu początkowego na przestrzeni stanów

(E) założenie jest fałszywe, ponieważ rozkład po parzystej liczbie kroków zbiega do innej granicy niż rozkład po nieparzystej liczbie kroków.

Zadanie 9. Pobieramy próbkę $x_1, \ldots, x_n$ niezależnych obserwacji z rozkładu Poissona o nieznanym parametrze λ. Szacujemy parametr $p_0 = e^{-\lambda}$ za pomocą estymatora $\hat{p}_0 = e^{-\bar{x}}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią z próbki. Obciążenie $E(\hat{p}_0) - p_0$ estymatora jest:

(A) zerowe

(B) ujemne

(C) dodatnie

(D) dodatnie lub ujemne, w zależności od liczebności próbki n

(E) dodatnie lub ujemne, w zależności od wartości parametru λ

Zadanie 10. Niech X ma funkcję gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} (1+a)x^a & \text{dla } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Testujemy H_0: $a = 1$ przeciwko H_1: $a = 2$. Jeśli dysponujemy pojedynczą obserwacją X , to test najmocniejszy o rozmiarze $\alpha = 0.1$ polega na odrzuceniu H_0 jeśli:

(A) $X > \sqrt[4]{0.9}$

(B) $X > \sqrt[2]{0.9}$

(C) $X > 0.9$

(D) $X < 0.1$

(E) $X < \sqrt[2]{0.1}$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 1996 r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	C	
4	A	
5	C	
6	D	
7	A	
8	B	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.