Zadanie 1. Preferencje decydenta wyraża funkcja użyteczności $u(x) = -e^{-2x}$.
X, Y, Z to wypłaty w trzech różnych grach;
X ma rozkład normalny o średniej 3 i wariancji 2,
Y ma rozkład normalny o średniej 4 i wariancji 3,
Z ma rozkład zdegenerowany: $\Pr(Z = 2) = 1$.
Jeśli $a \succ b$ oznacza, iż decydent preferuje a ponad b, $a \approx b$ oznacza, że jest ze względu na a oraz b indyferentny, które z poniższych zdań są prawdziwe?

(A) $X \succ Y \approx Z$

(B) $Z \succ X \succ Y$

(C) $X \succ Z \succ Y$

(D) $Z \succ X \approx Y$

(E) $Y \approx X \succ Z$

Zadanie 2. Wykres funkcji użyteczności pewnego decydenta przejawiającego awersję do ryzyka przechodzi przez następujących 5 punktów:

(0 ; 0) (1 ; 1) (x ; 2.5) (9 ; 3) (13 ; 3,5)

Zbiór wszystkich dopuszczalnych wartości x to przedział:

(A) (5 ; 6)

(B) (5 ; 7)

(C) (2.5 ; 7)

(D) (2.5 ; 6)

(E) (5 ; 9)

Zadanie 3. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$Pr(X=x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d, jeśli wiadomo, że $E\left[I_d(X)\right] = 0.37$.

Wyjaśnienie:

$$I_d(x) = \begin{cases} x - d & \text{gdy } x > d \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

(A) $2\frac{2}{3}$

(B) 3

(C) $3\frac{1}{3}$

(D) $3\frac{2}{3}$

(E) 4

Zadanie 4. O rozkładzie zmiennej X wiadomo, iż $\Pr(X=0)=0.8$, $\Pr(X>0)=0.2$, $E(X\,/\,X>0)=100$. Zbiór dopuszczalnych wartości $E\left[I_{10}(x)\right]$ jest przedziałem:

(A) [18 ; 20)

(B) [10 ; 20)

(C) (12 ; 18]

(D) (0 ; 20)

(E) [10 ; 18]

Zadanie 5. Rozkład warunkowy dwóch ryzyk X i Y przy danym poziomie parametru Θ ma następujące charakterystyki:

$$COV(X,Y/\Theta=\theta)=\frac{1}{2}\theta \quad ,$$

$$E(X/\Theta=\theta)=\theta \quad ,$$

$$E(Y/\Theta=\theta)=\theta \quad ;$$

podczas gdy zróżnicowanie parametru Θ w populacji ryzyk daje się opisać rozkładem Gamma (3, 6) . Oblicz *COV(X,Y)* .

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{3}$

Zadanie 6. Znajdź $\Pr(S=3)$, gdzie S ma złożony rozkład Poissona o parametrze częstotliwości $\lambda = 2$ i gdzie rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest funkcją prawdopodobieństwa $f(\mathrm{x})$:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.5	0.2	0.2	0.1

(A) $\frac{29}{30}e^{-2}$

(B) e^{-2}

(C) $\frac{16}{15}e^{-2}$

(D) $\frac{7}{6}e^{-2}$

(E) $\frac{4}{3}e^{-2}$

Zadanie 7. Mamy portfel rocznych polis na życie składający się z dwóch subportfeli. Subportfel 1 zawiera 800 polis ze współczynnikiem q=0.005 i kwotą benefitu 10 ; subportfel 2 zawiera 50 polis ze współczynnikiem q=0.01 i kwotą benefitu 20. Niech S_i oznacza łączną wartość wypłat w *i-tym* subportfelu, zaś $\tilde{S}_i$ oznacza aproksymację zmiennej S_i powstałą przez zastąpienie rozkładu dwumianowego takim rozkładem Poissona, że $E(\tilde{S}_i) = E(S_i)$. Wskaźnik względnego przeszacowania wariancji $\dfrac{VAR(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)}{VAR(S_1 + S_2)}$ wynosi :

(A) $\dfrac{50}{49}$

(B) $\dfrac{75}{74}$

(C) $\dfrac{100}{99}$

(D) $\dfrac{125}{124}$

(E) $\dfrac{150}{149}$

Zadanie 8. Klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela charakteryzują parametry:

c pochodna funkcji sumy zgromadzonych składek,

λ częstotliwość (roczna) Poissonowskiego procesu pojawiania się szkód,

u nadwyżka początkowa,

$F(\cdot)$ dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody.

Rozważmy proces podstawowy P_0 o dodatnich parametrach $c = c_0$, $\lambda = \lambda_0$, $u = u_0$ oraz o wykładniczym rozkładzie wartości pojedynczej szkody z dodatnią wartością oczekiwaną $1/\beta$ (mniejszą od c/λ). Rozważmy następnie trzy modyfikacje P_1, P_2, P_3 procesu P_0 o parametrach:

	c	λ	u	F
P_1	$c_1 = 2c_0$	$\lambda_1 = 2\lambda_0$	$u_1 = u_0$	$F_1(x) = F_0(x) \quad x \in R$
P_2	$c_2 = 2c_0$	$\lambda_2 = \lambda_0$	$u_2 = u_0$	$F_2(x) = F_0(2x) \quad x \in R$
P_3	$c_3 = 2c_0$	$\lambda_3 = \lambda_0$	$u_3 = 2u_0$	$F_3(x) = F_0(2x) \quad x \in R$

Niech Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 i Ψ_3 oznaczają prawdopodobieństwa ruiny w odpowiednich przypadkach. Zachodzą między nimi następujące relacje:

(A) $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 \neq \Psi_3$

(B) $\Psi_0 = \Psi_1 \neq \Psi_2 = \Psi_3$

(C) $\Psi_0 \neq \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3$

(D) $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 \neq \Psi_2$

(E) $\Psi_1 \neq \Psi_0 = \Psi_2 = \Psi_3$

Zadanie 9. Pewien portfel ryzyk generuje szkody w taki sposób, iż ilość szkód jest procesem Poissona ze stałą częstotliwością 100 rocznie, zaś rozkład wartości szkody w momencie *t* (jeśli w tym momencie do szkody dojdzie) ma dystrybuantę $F_t(x) = F_0(x \cdot e^{0.1 \cdot t})$ dla $x \in R$, o wartości oczekiwanej $p_1(t) = 10 \cdot e^{0.1 \cdot t}$. Odstęp w czasie między zajściem szkody a wypłatą odszkodowania ma rozkład wykładniczy ze średnią $\frac{10}{19}$. Wartość szkody nie ulega zmianie pomiędzy momentem jej zajścia a momentem wypłaty. Wartość oczekiwana niewypłaconych odszkodowań za szkody zaistniałe do momentu *t* wynosi:

(A) $450 \cdot e^{0.1 \cdot t}$

(B) $475 \cdot e^{0.1 \cdot t}$

(C) $500 \cdot e^{0.1 \cdot t}$

(D) $530 \cdot e^{0.1 \cdot t}$

(E) $555 \cdot e^{0.1 \cdot t}$

10. Portfel ryzyk składa się z dwóch niezależnych subportfeli. Wyznaczono charakterystyki rozkładu łącznej wartości szkód z tych subportfeli:

	wartość oczekiwana	wariancja	skośność
subportfel 1	5	9	2
subportfel 2	15	16	1/4

Rozkład łącznej wartości szkód z całego portfela aproksymujemy przesuniętym rozkładem Gamma (x_0, α, β) zachowującym wartość pierwszych trzech momentów zmiennej aproksymowanej. Parametry (x_0, α, β) wynoszą:

(A) $\left(-\frac{10}{7}, \frac{900}{49}, \frac{6}{7}\right)$

(B) $\left(\frac{15}{7}, \frac{625}{49}, \frac{5}{7}\right)$

(C) $\left(\frac{40}{7}, \frac{400}{49}, \frac{4}{7}\right)$

(D) $\left(\frac{65}{7}, \frac{225}{49}, \frac{3}{7}\right)$

(E) $\left(\frac{90}{7}, \frac{100}{49}, \frac{2}{7}\right)$

Egzamin dla Aktuariuszy z 5 października 1996 r.

Matematyka ubezpieczeń majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : .... KLUCZ ODPOWIEDZI ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	A	
5	E	
6	A	
7	E	
8	D	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.